

Banco de México
Documentos de Investigación

Banco de México
Working Papers

N° 2018-23

Información Incompleta y Señalización Costosa en la
Admisión a la Universidad

Alfredo Salgado
Banco de México

Diciembre 2018

La serie de Documentos de Investigación del Banco de México divulga resultados preliminares de trabajos de investigación económica realizados en el Banco de México con la finalidad de propiciar el intercambio y debate de ideas. El contenido de los Documentos de Investigación, así como las conclusiones que de ellos se derivan, son responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de México.

The Working Papers series of Banco de México disseminates preliminary results of economic research conducted at Banco de México in order to promote the exchange and debate of ideas. The views and conclusions presented in the Working Papers are exclusively the responsibility of the authors and do not necessarily reflect those of Banco de México.

Incomplete Information and Costly Signaling in College Admissions*

Alfredo Salgado[†]
Banco de México

Abstract: We analyze a college admissions game with asymmetric information between students and colleges. Students' preferences for colleges depend on the observable quality of the schools. In contrast, colleges' preferences for students depend on the latter's abilities, which are private information. Students and schools are matched via a decentralized mechanism in which students signal their abilities with costly observable signals. A closed-form symmetric separating equilibrium of this game that depends on the supply of and demand for schools seats and on college quality is characterized. In this equilibrium, an increase in the number of students, a reduction in the number of school seats or a drop in the quality of schools reduce the incentive of low-ability students to invest in signaling and increase it for high-ability students.

Keywords: College Admissions, Decentralized Mechanisms, Incomplete Information, Coordination Problems, Costly Signaling

JEL Classification: D82, C70, C71, C72, C78

Resumen: Se analiza un juego de admisión a la universidad entre estudiantes y escuelas con información asimétrica. Las preferencias de los estudiantes por las universidades dependen de la calidad observable de las escuelas. En contraste, las preferencias de las universidades por los estudiantes dependen de las habilidades de estos últimos, que son información privada. Estudiantes y escuelas se emparejados mediante un mecanismo descentralizado en el que los estudiantes invierten en una señal observable y costosa de sus habilidades. Se analiza un equilibrio separador simétrico que depende de la oferta y la demanda por plazas escolares, así como de la calidad de las universidades. En este equilibrio, un aumento del número de estudiantes, una reducción de las vacantes o una caída en la calidad de las escuelas disminuyen el incentivo de los estudiantes con menores habilidades de invertir en señalización, mientras que lo aumentan para los de mayores habilidades.

Palabras Clave: Admisión a la Universidad, Mecanismos Descentralizados, Información Incompleta, Problemas de Coordinación, Señalización Costosa

*Este documento es parte mi tesis doctoral por lo que estoy especialmente agradecido con mis asesores Antonio Romero Medina y Jordi Massó. Asimismo, agradezco los comentarios de Aldo Heffner, Daniela Puggioni y Cecilia Vives que ayudaron a mejorar el documento.

[†] Dirección General de Investigación Económica, Banco de México. Email: asalgot@banxico.org.mx.

1. Introducción

Este artículo analiza un problema de emparejamiento bilateral descentralizado en el contexto de las admisiones universitarias (Gale y Shapley, 1962). A diferencia de la literatura anterior, consideramos la presencia de información incompleta y el papel de la señalización costosa para entender cómo las universidades y los estudiantes se relacionan entre sí en ese contexto. Consideramos un entorno donde los estudiantes desean inscribirse en universidades cuya calidad es observable, mientras que las universidades buscan aceptar estudiantes altamente calificados. Suponemos que los estudiantes tienen información privada sobre sus habilidades académicas. Además, los agentes son emparejados de acuerdo con un mecanismo simple de emparejamiento descentralizado llamado Mecanismo de Señalización Costosa (CSM, por sus siglas en inglés) que se ejecuta en dos etapas. En la primera etapa de señalización, los estudiantes eligen una señal observable y costosa para revelar información acerca de sus habilidades. En la segunda etapa de emparejamiento, como en el caso de Alcalde y Romero-Medina (2000), las universidades y estudiantes son emparejados de acuerdo a un proceso de emparejamiento de dos etapas. Primero, los colegios hacen simultáneamente una oferta a un estudiante, después los estudiantes reúnen sus ofertas y simultáneamente eligen una de entre las disponibles. El CSM induce un juego en forma extensiva que es caracterizado por el emparejamiento de equilibrio y una estrategia de señalización.

El problema de emparejamiento bilateral descentralizado puede ser entendido como una forma de organizar el proceso de emparejamiento, permitiendo que los agentes de un lado del mercado se acerquen a los agentes del lado opuesto y propongan emparejarse. Se pueden observar varios problemas de emparejamiento descentralizados del mundo real que funcionan de la misma manera. Estos incluyen ejemplos en el mercado laboral, problemas de matrimonio y admisiones universitarias, entre otros. Dado que los agentes son libres de proponer emparejarse o no a cualquier otro agente del lado opuesto del mercado y aquellos que recibieron una propuesta son libres de aceptarla o rechazarla puede surgir un problema de coordinación. Como consecuencia, algunos agentes que en general deberían de emparejarse pueden terminar sin pareja y el mecanismo puede ser ineficaz para asignar a los agentes de manera eficiente

de acuerdo a un criterio particular. Además, el mecanismo de emparejamiento podría hacerlo de forma inestable. La estabilidad del emparejamiento es una propiedad natural y deseable de los mecanismos centralizados y descentralizados (Alcade, 1996). Un emparejamiento estable es aquel en el que ningún agente emparejado prefiere quedarse solo y ningún par de agentes, en lados opuestos del mercado, preferirían emparejarse entre sí en lugar de estar con sus asignaciones actuales. Intuitivamente siempre que un emparejamiento sea estable, el interés individual evita cualquier desviación o trato que pueda romper con el emparejamiento actual.¹

Varios artículos han analizado la posibilidad de resolver los problemas asociados a la coordinación de agentes y lograr asignaciones estables en mercados descentralizados de emparejamientos. Esta literatura muestra que algunos mecanismos de emparejamiento simples pueden resolver estos problemas en entornos con información completa. Por ejemplo, Alcalde, Pérez-Castrillo y Romero-Medina (1998) y Alcalde y Romero-Medina (2000) proponen dos mecanismos de emparejamiento muy similares en dos etapas que inducen un juego en forma extensiva. Muestran que estos procedimientos implementan el conjunto de emparejamientos estables en equilibrio perfecto en el subjuego. Estos mecanismos de emparejamiento aseguran la estabilidad de las asignaciones de equilibrio al restringir a los agentes a enviar solo una aplicación. Cuando los agentes pueden enviar múltiples aplicaciones, pueden surgir asignaciones inestables en equilibrio. Afortunadamente, de acuerdo a Triossi (2009), es fácil restaurar la estabilidad de las asignaciones de equilibrio en este tipo de mecanismos descentralizados, introduciendo un pequeño costo de aplicación. Además, incluso cuando el costo de la aplicación es insignificante y los estudiantes pueden enviar múltiples aplicaciones, algunos mecanismos dinámicos son efectivos para alcanzar un equilibrio estable.²

De acuerdo con el argumento previo, parece que en entornos con información completa es posible encontrar mecanismos de emparejamiento descentralizados que garantizan la es-

¹Las aplicaciones más importantes de la teoría de los emparejamientos estables en problemas de la vida real incluyen el Programa Nacional de Emparejamiento de Residentes (NRMP) y el NRMP con matrimonios; la asignación del sistema de escuelas públicas de la ciudad de Nueva York; la asignación del sistema de escuelas públicas de Boston; el Programa de Intercambio Renal de Nueva Inglaterra, entre otras aplicaciones (Roth, 2008).

²Ver Sotomayor, 2003; Romero-Medina y Triossi, 2014; y Haeringer, G. y Wooders, M., 2011.

tabilidad de las asignaciones de equilibrio y resuelven el problema de coordinación entre los agentes. Sin embargo, ante la presencia de información incompleta, se requieren condiciones adicionales para tratar estos problemas. Coles, Kushnir y Niederle (2010) introducen un mecanismo de señalización no costosa en problemas de emparejamiento descentralizados con información incompleta acerca de las preferencias de los agentes.³ Entre otras propiedades deseables, en equilibrio este mecanismo aumenta el número esperado de emparejamientos y el bienestar de los agentes que señalan sus preferencias. Sin embargo, un esquema de señalización costosa parecería ser un enfoque más apropiado para analizar diversos procesos de emparejamiento descentralizados de la vida real, como el problema de admisión a las universidades, en presencia de información privada. Es bien sabido que la mayoría de los colegios y universidades más selectivos en los Estados Unidos requieren un conjunto de señales para las admisiones universitarias; esto parece ser significativamente costoso para los estudiantes. Ejemplos de estas señales son, los resultados de pruebas estandarizadas como el SAT o el ACT,⁴ ensayos, cartas de recomendación y entrevistas personales, entre otros requisitos (Dearden, Meyerhoefer and Yang, 2017). Por lo tanto, los estudiantes tienen que gastar una cantidad significativa de esfuerzo (y dinero) en cada aplicación con el fin de mandar una señal de sus habilidades y mejorar sus oportunidades de ser aceptados en las universidades deseadas.⁵

Con el fin de simplificar el análisis, consideramos un esquema muy simple de un problema de emparejamiento uno-a-uno; es decir, cada estudiante puede asistir como máximo a una universidad y cada escuela cuenta con una sola vacante disponible. Este supuesto se puede relajar, como en la literatura anterior, asumiendo que las universidades tienen preferencias responsivas sobre grupos de estudiantes (Roth and Sotomayor, 1990). Sin embargo, consideramos que extender el modelo en esta dirección podría hacer que la caracterización del equilibrio sea mucho más compleja y menos intuitiva, sin agregar información relevante

³Otro ejemplo puede ser encontrado en Coles, et. al. (2010). Ellos analizan el papel de la señalización de preferencias en el contexto del mercado laboral para nuevos economistas.

⁴El SAT (Prueba de Evaluación Escolar) y el ACT (Prueba Universitaria Americana) son las pruebas estandarizadas más importantes para las admisiones universitarias en los Estados Unidos.

⁵Ver Bettinger y Baker (2011), Dominguez y Briggs (2009), Montgomery y Lilly (2012) y Powers y Rock (1999).

para el entendimiento de las consecuencias de incluir información incompleta y señalización costosa en este tipo de problemas de admisiones universitarias descentralizadas. También suponemos que todos los agentes de cada lado del mercado tienen las mismas preferencias, es decir, todos los estudiantes clasifican a las universidades de acuerdo a la calidad observada y cada universidad tendría la misma clasificación de los estudiantes de acuerdo a sus habilidades académicas si estas fueran observables. Si bien parece razonable suponer que las universidades prefieren a los estudiantes con mayores habilidades académicas, asumir que todos los estudiantes tienen las mismas preferencias sobre el conjunto de colegios es más restrictivo. Sin embargo, existe evidencia empírica en favor de la suposición. Por ejemplo, Griffith and Rask (2007) muestran que en Estados Unidos aquellos estudiantes que pagan el total de su colegiatura tienen una mayor probabilidad de asistir a una escuela con un mayor rango o calidad (de acuerdo con la clasificación del USnews and World Report). Además, si bien los solicitantes que recibieron ayuda estudiantil son menos propensos, también muestran una preferencia sistemática por las escuelas de mayor rango.

Como primer acercamiento al problema para entender los efectos de incluir información incompleta en el estudio de las admisiones universitarias, analizamos un problema de emparejamiento sin señalización en el CSM que servirá de referencia. En este contexto, todos los estudiantes son ex-ante idénticos, ya que las universidades sólo conocen la distribución de probabilidad de las habilidades de los estudiantes. Bajo estas condiciones, caracterizamos un equilibrio simétrico de este juego en el cual los pagos de los agentes dependen de la cantidad de estudiantes, el valor esperado de las habilidades y la calidad de las universidades. Este equilibrio tiene varias implicaciones interesantes. Primero, en equilibrio las escuelas esperan matricular estudiantes con habilidades iguales al promedio de la distribución, ya que el proceso de emparejamiento no provee información adicional acerca de los estudiantes. Segundo, encontramos que la probabilidad de matricular a un estudiante es decreciente en la calidad de la universidad. Por lo tanto, solo la universidad de la más alta calidad llenará su vacante con probabilidad igual a uno, mientras que el resto de los agentes pueden terminar sin ser emparejados con probabilidad positiva. Finalmente, demostramos que un incremento en la cantidad de estudiantes aumenta los pagos de las universidades, al tiempo que disminuye los

de los estudiantes.

Después de analizar el CSM sin señalización, caracterizamos un equilibrio simétrico separador del juego inducido por el CSM donde todos los estudiantes juegan de acuerdo con la misma estrategia de señalización. Para sostener este equilibrio separador, consideramos un conjunto de “creencias” donde los estudiantes con mayores niveles de sus señales son asociados con habilidades más altas. Bajo estas “creencias”, las universidades forman una relación ordinal de preferencias preliminar sobre el conjunto de estudiantes, según la cual prefieren inscribir a los estudiantes con señales más altas. Esto implica que para cada perfil de señales de los estudiantes, hay una asignación de equilibrio única en la etapa de emparejamiento del CSM que es consistente con esas “creencias”. Esta asignación de equilibrio es asortativa, en el sentido de que el estudiante con la señal más alta se empareja con la mejor universidad, el segundo estudiante con la señal más alta se empareja con la segunda mejor universidad, y así sucesivamente.⁶

En la etapa de señalización del CSM, los estudiantes toman como dada la asignación de la etapa de emparejamiento del mecanismo y juegan un juego de señalización en el que eligen una señal costosa y observable de sus habilidades.⁷ Caracterizamos un equilibrio simétrico de Nash en estrategias puras de este juego. Este equilibrio se caracteriza por una estrategia de señalización estrictamente creciente, continua y diferenciable que depende de las habilidades de los estudiantes. En equilibrio ningún par de estudiantes elige la misma señal, de modo que se induce un único emparejamiento de equilibrio que es asortativo con respecto a las verdaderas habilidades de los estudiantes. Es decir, el mejor estudiante es emparejado con la mejor universidad, el segundo mejor estudiante es emparejado con la segunda mejor universidad, y así sucesivamente. Además, en este equilibrio el número de emparejamientos potenciales del modelo es maximizado, además de ser estable.

Nuestra caracterización arroja una solución cerrada del equilibrio de señalización que nos permite realizar algunos análisis de estática comparativa. El primer ejercicio trata de

⁶Hoppe, Moldovanu y Sela (2009) analizan un modelo similar donde el emparejamiento asortativo está exógenamente dado.

⁷Este enfoque es similar a las subastas de pago total y a los modelos de concursos. Ver por ejemplo: Barut y Kovenock (1998), Glazer y Hassin (1988) y Moldovanu y Sela (2001).

los efectos de un cambio en el número de estudiantes. Intuitivamente, un incremento en la cantidad de competidores (estudiantes) podría reducir la probabilidad de matriculación en cualquier universidad, llevando a los estudiantes a disminuir su inversión en señalización. Sin embargo, nuestros resultados muestran que este efecto no es simétrico: al enfrentar a un nuevo competidor, la probabilidad de que los estudiantes poco calificados se inscriban en la universidad disminuye, mientras que para los estudiantes altamente calificados aumenta. Por lo tanto, los estudiantes poco calificados reducen su inversión en señalización, mientras que para los altamente calificados aumenta. Asimismo, analizamos el efecto de un cambio en el número de vacantes escolares y un cambio en la calidad de las escuelas con implicaciones similares. En particular, mostramos que un aumento en el número de vacantes escolares o en la calidad de los colegios lleva a los estudiantes poco calificados a aumentar su inversión en señalización, mientras que los estudiantes altamente calificados la disminuyen.

Los resultados anteriores son de gran utilidad para explicar una interesante observación empírica en las admisiones universitarias en el mundo real.⁸ En los Estados Unidos se ha observado una disminución en la puntuación media del SAT a medida que aumenta la tasa de participación de los estudiantes (Wallace, 27 de septiembre de 2011). Según el College Board,⁹ el puntaje promedio del SAT ha disminuido debido a que más estudiantes con antecedentes académicos heterogéneos están representados en el grupo de examinados; es decir, un aumento en el número de solicitantes disminuye sistemáticamente la proporción de buenos estudiantes en la población. Nuestros resultados sugieren una explicación alternativa basada en el juego de señalización subyacente del problema.

Finalmente, analizamos las ganancias del CSM que se definen de manera natural como la diferencia entre los pagos de los agentes del equilibrio separador con señalización y el equilibrio agrupador sin señalización del CSM. Mostramos que las ganancias de los estudiantes son estrictamente crecientes con respecto a sus habilidades. Sin embargo, esta propiedad de las

⁸Comisión de educación postsecundaria de California (CPEC), , “SAT Scores and Participation Rate” at <http://www.cpec.ca.gov/StudentData/50StateSATScores.asp>.

⁹“43 % of 2011 College-Bound Senior Met SAT College and Career Readiness Benchmark” en <http://press.collegeboard.org/releases/2011/43-percent-2011-college-bound-seniors-met-sat-college-and-career-readiness-benchmark>

ganancias de los estudiantes no garantiza que se puedan evitar pérdidas potenciales. Además, es posible demostrar que, bajo ciertas distribuciones de las habilidades, todos los estudiantes pueden tener ganancias negativas. Por su parte, las ganancias de las universidades dependen del valor esperado de las estadísticas de orden de la distribución de las habilidades de los estudiantes. Por lo tanto, el análisis de estas ganancias es complejo, ya que para la mayoría de las distribuciones de probabilidad no hay soluciones cerradas para los momentos de las estadísticas de orden. De tal forma, analizamos el caso particular de habilidades distribuidas exponencialmente que permiten calcular una solución de cerrada para las ganancias de las universidades. Aún si el modelo exponencial es un caso particular, tiene implicaciones interesantes. Primero, las ganancias de las universidades son estrictamente crecientes en la calidad de la universidad; es decir, las mejores universidades tienen las mayores ganancias. En segundo lugar, las ganancias de las universidades aumentan a medida que se incrementa el número de estudiantes; es decir, todas las universidades se benefician de una mayor demanda por vacantes escolares. Finalmente, demostramos que una demanda suficientemente grande por dichas vacantes genera ganancias positivas para todas las universidades.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, describimos el modelo básico y las principales definiciones. En la Sección 3, analizamos el problema de las admisiones universitarias sin señalización que utilizaremos como referencia. En la Sección 4, introducimos el CSM y la caracterización de su equilibrio. En la Sección 5, realizamos un análisis estática comparativa. En la Sección 6, analizamos las ganancias del CSM. En la Sección 7, presentamos algunas conclusiones. Todas las demostraciones se presentan en el Apéndice.

2. El Modelo

Analizamos un modelo con $M \geq 1$ colegios y $N > M$ estudiantes. Sea $C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ el conjunto de universidades con un elemento típico $c \in C$ y sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ el conjunto de estudiantes con un elemento típico $s \in S$. Cada escuela $c \in C$ está caracterizada por un parámetro observable $v_c > 0$, el cual se puede interpretar como una medida de su

calidad. Con cierto abuso de la notación, utilizamos v_j para denotar la calidad del colegio c_j . Para simplificar, con regularidad diremos “el estudiante i ” en lugar de “el estudiante s_i ” y “el colegio j ” en lugar de “el colegio c_j ”. También supondremos, sin pérdida de generalidad, que las calidades de los colegios satisfacen la siguiente condición, $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_M$.

Cada estudiante $s \in S$ está caracterizado por un parámetro $\alpha_s \in [0, w]$ para todo $w > 0$, el cual es interpretado como una medida de sus capacidades intelectuales o habilidades académicas. Decimos que un estudiante s tiene mayores habilidades académicas que otro estudiante s' siempre que $\alpha_s > \alpha_{s'}$. Las habilidades de los estudiantes son información privada. Este supuesto implica que solamente el estudiante $s \in S$ conoce la realización de su parámetro α_s . A lo largo del artículo, suponemos que las capacidades intelectuales de los estudiantes son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre algún intervalo $[0, w]$, de acuerdo con una función de distribución acumulada continua y estrictamente creciente F tal que $F(0) = 0$ y $F(w) = 1$.¹⁰ La distribución F tiene una función de densidad asociada $f = F'$ que satisface $f(\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in (0, w)$. Todos estos elementos del modelo son de conocimiento común para todos los jugadores, a saber, la distribución de probabilidad de las habilidades de los estudiantes F ; el número de estudiantes y colegios; y la calidad de los colegios.

2.1. El Problema de Emparejamiento

Con el objetivo de simplificar el estudio, nos enfocaremos en el análisis del problema de emparejamiento más simple, es decir, un modelo de emparejamiento “uno-a-uno”, donde cada agente puede tener como máximo una pareja del otro lado del mercado,¹¹ es decir, cada colegio tiene solamente una vacante disponible. En este contexto, una asignación es un emparejamiento entre universidades y estudiantes, el cual es un mapeo que especifica una pareja para cada agente, permitiendo al mismo tiempo la posibilidad de que algunos agentes

¹⁰Todos los resultados que presentaremos se sostienen cuando las habilidades de los estudiantes son independientes e idénticamente distribuidas sobre un intervalo $[0, \infty)$ de acuerdo con una distribución de probabilidad acumulada estrictamente creciente, continua y diferenciable F tal que $F(0) = 0$ y $\lim_{w \rightarrow \infty} F(w) = 1$.

¹¹El análisis se puede extender fácilmente a un modelo de emparejamiento “muchos-a-uno” (donde los agentes de un lado del mercado pueden estar emparejados con más de un agente del otro lado del mercado) bajo el supuesto de que las preferencias de los colegios son “responsivas” (Roth and Sotomayor, 1990).

permanezcan sin ser emparejados. Formalmente,

Definición 1 *Un emparejamiento μ es un mapeo del conjunto $S \cup C$ sobre si mismo, tal que:*

1. Si $\mu(s) \neq s$ entonces $\mu(s) \in C$;
2. Si $\mu(c) \neq c$ entonces $\mu(c) \in S$; y
3. $\mu(s) = c$ si y solo si $s = \mu(c)$.

De acuerdo con la definición anterior, un estudiante (colegio) sin pareja está emparejado con él mismo (consigo mismo). Con el fin de simplificar, cada estudiantes (universidad) obtiene una utilidad igual a la calidad (habilidades académicas) de su(s) pareja(s). Sean $U_s(\mu)$ y $U_c(\mu)$ las utilidades obtenidas por el estudiante s y el colegio c , respectivamente, bajo el emparejamiento μ . Entonces, cada estudiante $s \in S$ obtiene un pago,

$$U_s(\mu) = \begin{cases} v_c & \text{si } \mu(s) = c \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

Mientras que cada escuela $c \in C$ obtiene un pago,

$$U_c(\mu) = \begin{cases} \alpha_s & \text{si } \mu(c) = s \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

Normalizamos la utilidad de permanecer sin pareja a cero, tanto para los colegios, como para los estudiantes. En la literatura donde se analizan problemas de emparejamiento, un problema de admisiones o de admisión a las universidades es completamente descrito por una tripleta (S, C, \succ) , donde S es un conjunto de estudiantes, C es un conjunto de universidades o colegios y $\succ = (\succ_{s_1}, \dots, \succ_{s_N}; \succ_{c_1}, \dots, \succ_{c_M})$ es un perfil de preferencias. En este contexto, cada agente $a \in S \cup C$ tiene una relación de preferencias estrictas \succ_a que es completa y transitiva sobre el conjunto de agentes que se encuentran en el lado opuesto del mercado y la posibilidad de permanecer sin emparejarse.

Es fácil observar que cada estudiante $s \in S$ tiene una relación de preferencias \succ_s sobre el conjunto de universidades y la posibilidad de permanecer sin pareja $C \cup \{s\}$, tal que: a)

$c \succ_s s$ si y solo si $v_c > 0$ y b) para todo $c, c' \in C$ se satisface que $c \succ_s c'$ si y solo si $v_c > v_{c'}$. Dado que la calidad de los colegios es observable para todos los agentes, implica que todos los estudiantes tienen preferencias ordinales idénticas. De manera similar a los estudiantes, cada universidad $c \in C$ tiene una relación de preferencias \succ_c sobre el conjunto de estudiantes y la posibilidad de no llenar su vacante $S \cup \{c\}$, tal que: a) $s \succ_c c$ si y solo si $\alpha_s > 0$ y b) para todo $s, s' \in S$, es cierto que $s \succ_c s'$ si y solo si $\alpha_s > \alpha_{s'}$. Sea \succeq_a la relación débil de preferencia asociada a \succ_a para cada agente $a \in S \cup C$. Entonces sabemos que, para cualquier $c, c' \in C$, $c \succeq_s c'$ implica que o $c \succ_s c'$ o $v_c = v_{c'}$. De manera similar, para cualquier $s, s' \in S$, $s \succeq_c s'$ implica que o $s \succ_c s'$ o $\alpha_s = \alpha_{s'}$.

Un emparejamiento μ es **individualmente racional** siempre que $\mu(a) \succeq_a a$ para todo $a \in S \cup C$. Un par de agentes estudiante-universidad (s, c) tal que $\mu(s) \neq c$ **bloquea** el emparejamiento μ si, $s \succ_c \mu(c)$ y $c \succ_s \mu(s)$. Un emparejamiento μ es **estable** si es individualmente racional y no es bloqueado por ningún par estudiante-colegio. Sea $\mathcal{E}(S, C, \succ)$ el conjunto de **emparejamientos estables** del problema de admisiones a la universidad (S, C, \succ) .

3. El problema de Referencia: Admisiones a la Universidad sin Señalización

En esta sección estudiamos un problema de admisión a la universidad que servirá de base para el resto del análisis del artículo. En este problema de referencia se supone que no hay señalización y que hay información incompleta acerca de las habilidades académicas de los estudiantes. En este contexto, ex-ante todos los estudiantes son idénticos, debido a que las universidades solo conocen la distribución de probabilidad de las habilidades académicas, pero no la realización de sus parámetros. Por lo tanto, el valor esperado dado por $E[\alpha]$ es la mejor predicción que tienen a su disposición las escuelas de las capacidades académicas de los estudiantes.

A lo largo del artículo asumimos que los estudiantes y los colegios se emparejan de acuerdo con el siguiente mecanismo descentralizado de emparejamiento simple que se desarrolla

en dos etapas.

1. **Ofertas:** Cada universidad $c \in C$ envía un mensaje $m(c) \in S \cup \{c\}$. Si $m(c) = s$, entonces el colegio c está haciendo una oferta al estudiante s . Si $m(c) = c$, el colegio c no está haciendo ninguna oferta. Sea $O(s) = \{c \in C : m(c) = s\} \cup \{s\}$ el conjunto de ofertas del estudiante s (notemos que por definición cualquier estudiante siempre recibe una oferta de si mismo);
2. **Contratación:** Cada estudiante $s \in S$ escoge una de sus ofertas disponibles en el conjunto $O(s)$.

Escuelas y estudiantes juegan el juego que es inducido por este mecanismo de emparejamiento. Bajo el supuesto de información completa y preferencias estrictas de los agentes, Alcalde y Romero-Medina (2000) demuestran que este mecanismo implementa en **Equilibrio Perfecto en el Subjuego (SPE)** el conjunto de emparejamientos estables de este tipo de problemas de admisión a la universidad. Por lo tanto, esta clase de mecanismos de emparejamiento descentralizados agota las posibilidades de emparejar universidades y colegios de manera estable cuando los agentes actúan estratégicamente.¹² Además, bajo ciertas condiciones sobre las preferencias de los agentes,¹³ este mecanismo también maximiza el número de emparejamientos potenciales del problema.

Cuando se tiene información incompleta en el problema, estos resultados ya no pueden sostenerse en general. Este tipo de mecanismos descentralizados, aunque simples, pueden tener muchos equilibrios que dependen de la información disponible acerca de las habilidades de los estudiantes y el grado de coordinación entre las universidades. En esta sección, nos enfocamos en el análisis de dos tipos “naturales” de equilibrio del problema de emparejamiento, uno con coordinación y uno sin coordinación entre las universidades, cuya caracterización nos permite entender los efectos de la inclusión de información incompleta y el papel

¹²Estos resultados se sostienen también en problemas de emparejamiento donde los colegios tienen cuotas de estudiantes, siempre que las preferencias de estas universidades sean “responsivas”, ver Roth y Sotomayor (1991).

¹³Cuando las preferencias de las escuelas son responsivas, el conjunto de agentes sin emparejar y vacantes sin ocupar es el mismo en cualquier emparejamiento estable (Roth y Sotomayor, 1990). Este resultado implica que este mecanismo simple de emparejamiento no solo agota la posibilidad de emparejar a los agentes de manera estable, sino también maximiza el número potencial de emparejamientos del problema.

de la coordinación entre agentes en este tipo de mecanismos descentralizados de emparejamiento. La caracterización explícita de los pagos de los agentes, que depende del número de estudiantes y universidades, las calidades de los colegios, y las habilidades de los estudiantes, nos permite identificar el efecto de un cambio en uno de estos parámetros sobre los pagos de equilibrio del juego.

Antes de analizar estos equilibrios, es posible argumentar cuál será el comportamiento razonable de equilibrio de los estudiantes. Dado que la calidad de los colegios es observable, es razonable que en cualquier equilibrio del juego, los estudiantes deberán escoger la mejor oferta entre las que tengan disponibles. Asimismo, es claro que bajo cualquier regla de decisión alternativa, los estudiantes no podrán obtener una mejor asignación. Por lo tanto, la regla de decisión que establece que los estudiantes escogerán la mejor oferta de entre las que tienen disponibles es una estrategia dominante. De acuerdo con el argumento anterior, suponemos que las universidades anticipan el comportamiento óptimo de los estudiantes para decidir a cuáles hacen una oferta. Con el fin de simplificar, se etiqueta a cada estudiante con un número natural de 1 a N . Estas etiquetas son observables para todos los agentes del juego y no proporcionan ninguna información acerca las capacidades de los estudiantes.

Dada la notación anterior, analizamos una situación de equilibrio en la cual las universidades coordinan sus acciones con base en las etiquetas asignadas a los estudiantes. Consideremos un perfil de estrategias en el que todos los estudiantes siguen su estrategia dominante, mientras que cada universidad c_j envía un mensaje al estudiante j . Sea μ el emparejamiento que resulta de este perfil de estrategias. Es sencillo verificar que esta asignación satisface $\mu(c_j) = j$ para todo $j = 1, \dots, M$ mientras que el resto de estudiantes permanece sin emparejarse, es decir, $\mu(j) = j$ para $j = M + 1, \dots, N$. De acuerdo con esta asignación, cada colegio obtiene un pago igual a $E[\alpha]$, mientras que los estudiantes obtienen unos pagos iguales a v_j para $j = 1, \dots, M$ y cero en cualquier otro caso. Se puede mostrar fácilmente que este perfil de estrategias es un SPE de este juego de admisiones a la universidad. Primero, notemos que ningún estudiante tiene a su disposición una desviación que sea beneficiosa, dado que cada estudiante está siguiendo su estrategia dominante. Segundo, cualquier universidad c_k puede desviarse, enviando un mensaje a cualquier estudiante alternativo $j \neq k$. En este caso, el

colegio c_k obtendrá como resultado o emparejarse con otro estudiante $j = k + 1, \dots, N$ o ser rechazado por otro $j = 1, \dots, k - 1$. Es claro que esta desviación no puede ser beneficiosa para la escuela, dado que todos los estudiantes son idénticos ex-ante. Además de lo anterior, notemos que, bajo este equilibrio, el número de emparejamientos potenciales del problema es maximizado. Asimismo, es claro que este equilibrio está bien definido para cualquier permutación del conjunto de estudiantes, llevando a los mismos pagos para cada colegio.

Ahora consideraremos un tipo de equilibrio sin ningún tipo de coordinación entre las universidades. Queremos mostrar que el perfil de estrategias en el que los estudiantes utilizan su estrategia dominante y las universidades hacen una oferta a cada estudiante con igual probabilidad es un SPE de este juego de admisiones a la universidad.

Consideremos un problema de admisiones a la universidad con $M \geq 1$ colegios y $N > M$ estudiantes. Como antes, se etiqueta a cada estudiante con un número natural de 1 a N que no proporciona ninguna información acerca de sus habilidades; los agentes solo conocen su distribución de probabilidad. Vamos a suponer que cada universidad hace una oferta a cada estudiante con igual probabilidad (es decir, $\frac{1}{N}$), queremos probar que ningún colegio tiene disponible una desviación redituable de esta estrategia. Consideramos que cualquier colegio c_j con calidad observable v_j está planeando desviarse de dicha estrategia. Notemos que hay $j - 1$ universidades con mayor calidad que c_j y $M - j$ con menor calidad. Dado que la calidad del colegio es observable, una oferta de la escuela c_j siempre será más preferida a cualquier oferta de las $M - j$ universidades de menor calidad. De acuerdo con el argumento anterior, la oferta del colegio c_j será aceptada por el estudiante i siempre que cualquiera de las $j - 1$ escuelas de mayor calidad hayan hecho una oferta a cualquiera de los $N - 1$ estudiantes restantes.

Por lo tanto, el número total de combinaciones de ofertas de $M - j$ escuelas realizadas a N estudiantes es N^{M-j} , mientras que el número total de combinaciones de ofertas de $j - 1$ colegios enviadas a $N - 1$ estudiantes es $(N - 1)^{j-1}$. Dado que las universidades no se coordinan para realizar sus acciones, una oferta del colegio c_j será aceptada por el estudiante

i con probabilidad:

$$\frac{(N-1)^{j-1} N^{M-j}}{N^{M-1}} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \text{ para } j = 1, \dots, M. \quad (3)$$

Entonces, al hacer una oferta al estudiante i con probabilidad $\frac{1}{N}$, el colegio c_j obtiene una utilidad esperada de $\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} E[\alpha]$. Notemos que estos pagos solo dependen del valor esperado de las habilidades de los estudiantes, dado que en principio todos los estudiantes son idénticos ex-ante.

Para demostrar que la situación anterior es un equilibrio, consideremos que el colegio c_j está planeando desviarse de su estrategia haciendo una oferta a cada estudiante i con una probabilidad $p_i \neq \frac{1}{N}$. Es fácil mostrar que tal desviación no puede ser redituable, dado que el pago resultante satisface $\sum_{i=1}^N p_i \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} E[\alpha] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} E[\alpha]$ para cualquier $p_i \neq \frac{1}{N}$ tal que $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. En conclusión, el perfil de estrategias de acuerdo al cual los colegios envían ofertas a cada estudiante con igual probabilidad es un SPE simétrico de este juego. Asimismo, es interesante notar que en este equilibrio los pagos de las escuelas EQ_{c_j} dependen solamente del número de estudiantes, el valor esperado de las habilidades de los estudiantes y de la posición relativa de los colegios de acuerdo con su calidad, es decir,

$$EQ_{c_j} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} E[\alpha] \text{ para } j = 1, \dots, M. \quad (4)$$

Ahora deduciremos los pagos de los estudiantes en este equilibrio simétrico. En este caso, es necesario determinar la probabilidad de que cada estudiante $i = 1, \dots, N$ se matricule en la escuela c_j para $j = 1, \dots, M$. En primer lugar, sabemos que el estudiante i rechazará cualquier oferta, excepto la mejor de las que tenga disponibles. Esto implica que el estudiante i se matriculará en la universidad c_1 con probabilidad $\frac{1}{N}$. Asimismo, es fácil argumentar que, en general, el estudiante i se matriculará en el colegio c_j con probabilidad, $\frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1}$. Por lo tanto, el pago esperado de cada estudiante $i = 1, \dots, N$ está dado por

$$EU(N, M) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M v_k \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \quad (5)$$

Dado que los estudiantes se matriculan en cada colegio con probabilidad positiva, los pagos esperados de los estudiantes son estrictamente positivos para cualquier número de jugadores $M \geq 1$ y $N > M$ y además satisfacen que $v_1 > EU(N, M) > 0$. Asimismo, se sabe que los estudiantes podrían permanecer sin emparejarse con una probabilidad igual a $1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^M$, la cual es estrictamente positiva, creciente en el número de estudiantes, y decreciente en el número de vacantes disponibles en las escuelas.

Este sencillo modelo es de mucha utilidad para analizar la consecuencias de la falta de coordinación entre los agentes en problemas de emparejamiento con información incompleta. En primer lugar, notemos que, para cualquier número de estudiantes N y escuelas M , todos los agentes con excepción del colegio de mayor calidad permanecen sin emparejar con probabilidad positiva. El colegio c_1 se empareja con probabilidad igual a uno y obtiene un pago esperado igual a $E[\alpha]$, el cual es la mejor predicción de las habilidades de los estudiantes sin considerar ninguna otra información adicional. En segundo lugar, el emparejamiento de equilibrio puede ser ineficiente, dado que los colegios solamente conocen el valor esperado de las habilidades de los estudiantes. Además de lo anterior, la probabilidad de matricular a un estudiante es decreciente en el “ranking” del colegio, debido a que dicha probabilidad dada por la expresión $\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1}$ es estrictamente decreciente en j . Por lo tanto, la falta de coordinación entre los agentes afecta principalmente a los colegios de menor calidad.

4. El Mecanismo de Señalización Costosa

En esta sección, analizamos un mecanismo de señalización descentralizado llamado **Mecanismo de Señalización Costosa** (CSM). Bajo este mecanismo, cada estudiante $s \in S$ elige el nivel de una señal que es observable y costosa igual a $P_s \geq 0$ con el fin de señalar sus habilidades académicas. Formalmente, un estudiante $s \in S$ con tipo α y que escoge una señal P_s tiene que asumir un costo igual a

$$C(\alpha, P_s) = \frac{c(P_s)}{\phi(\alpha)} \quad (6)$$

Para el análisis de este mecanismo de emparejamiento, asumiremos que la función de costos $c(\cdot)$ es estrictamente creciente, continua, diferenciable y convexa tal que $c(0) = 0$. También supondremos que la función $\phi(\cdot)$ es estrictamente creciente, continua, diferenciable y acotada superiormente en el intervalo $[0, w]$ tal que $\phi(0) > 0$.

El perfil de señales $(P_s)_{s \in S}$ es observable para todos los agentes del modelo. Asimismo, bajo el CSM, los colegios y los estudiantes se emparejan de acuerdo con el siguiente procedimiento descentralizado en dos etapas:

1. **Etapa de Señalización:** Cada estudiante $s \in S$ con parámetro α escoge una señal $P_s \geq 0$ al costo $C(\alpha, P_s)$.
2. **Etapa de emparejamiento:** Después de observar el perfil de señales $(P_s)_{s \in S}$, los estudiantes y las universidades se emparejan de acuerdo con el siguiente procedimiento descentralizado:
 - a) **Ofertas:** Cada escuela $c \in C$ envía un mensaje $m(c) \in S \cup \{c\}$. Si $m(c) = s$, implica que el colegio c está haciendo una oferta al estudiante s . Si $m(c) = c$, implica que el colegio c no hace ninguna oferta. Sea $O(s) = \{c \in C : m(c) = s\} \cup \{s\}$ el conjunto de ofertas recibidas por el estudiante s (recordemos que un estudiante siempre recibe al menos una oferta de sí mismo);
 - b) **Matriculación:** Cada estudiante $s \in S$ escoge una de sus ofertas disponibles $O(s)$.

A partir de este modelo, queremos caracterizar un equilibrio simétrico y estrictamente separador donde todos los estudiantes utilicen la misma estrategia de señalización. Obviamente, el modelo puede admitir la existencia de muchos otros equilibrios. Por ejemplo, equilibrios agrupadores donde ningún estudiante invierta en señalar sus habilidades (por ejemplo, en esta situación es posible sostener cualquiera de los equilibrios simétricos analizados en la sección anterior) o también equilibrios semi-separadores donde solo algunos estudiantes invierten en señalización.

Para sostener el equilibrio estrictamente separador en el que estamos interesados, consideremos unas “creencias” a partir de las cuales los estudiantes con mayores niveles de sus señales costosas son asociados con mayores habilidades académicas. Formalmente, es posible describir estas “creencias” por medio de una distribución continua de probabilidad de las habilidades de los estudiantes dada la señal $P > 0$, es decir, una función de probabilidad acumulada $G(\alpha | P)$. Supondremos que estas “creencias” tienen asociada una función de densidad continua $g(\alpha | P)$ y que satisface además $G(\alpha | P') < G(\alpha | P)$ para todo $\alpha \in (0, w)$ siempre que $P' > P$. Notemos que estas condiciones implican que $E[\alpha | P'] > E[\alpha | P]$ para todo $\alpha \in (0, w)$ siempre que $P' > P$ donde $\int \alpha g(\alpha | P) d\alpha = E[\alpha | P]$. Ahora consideramos que después de ser observado el perfil de señales de los estudiantes $(P_s)_{s \in S}$, las universidades “actualizan” sus preferencias con la nueva información a partir de la siguiente regla simple. Cada universidad $c \in C$ forma una relación de preferencias auxiliar \succ_c^* sobre el conjunto de estudiantes y la posibilidad de permanecer sin emparejar, $S \cup \{c\}$ tal que: a) $s \succ_c^* c$ si y solo si $P_s > 0$ y b) para cualquier $s, s' \in S$, $s \succ_c^* s'$ si y solo si $P_s > P_{s'}$. Es evidente que el perfil de preferencias auxiliar $\succ_c^* = (\succ_c^*)_{c \in C}$ es consistente con las “creencias” $G(\alpha | P)$. Así, de acuerdo con el argumento anterior, los estudiantes con mayores niveles de sus señales son asociados a mayores habilidades esperadas. Bajo estas condiciones, es posible establecer el siguiente resultado.

Proposición 1 *Consideremos el conjunto de “creencias” $G(\alpha | P)$ tal que $G(\alpha | P') < G(\alpha | P)$ para todo $\alpha \in (0, w)$ siempre que $P' > P$ y supongamos que estas “creencias” tiene una función de densidad continua $g(\alpha | P) > 0$. Entonces, para cualquier perfil de señales $(P_s)_{s \in S}$ tal que $P_s \neq P_{s'}$ para todo $s, s' \in S$ y $s \neq s'$, existe una única asignación de equilibrio en SPE en la segunda etapa del CSM. Este resultado es el único emparejamiento estable del problema de admisiones a la universidad, $(S, C, (\succ_s, \succ_c^*))$. Más aún, esta única asignación de equilibrio es asortativa.*

De acuerdo con la proposición anterior, solamente emparejamientos estables entre estudiantes y universidades son asignaciones de equilibrio razonables del CSM (Alcalde y Romero-Medina, 1998). Además de lo anterior, el resultado establece que bajo las preferencias auxilia-

res de los colegios $\succ_C^* = (\succ_c^*)_{c \in C}$ el emparejamiento que resulta del mecanismo es asortativo, en el sentido de que el estudiante con la mayor señal estará emparejado con el mejor colegio; el estudiante con la segunda mayor señal estará emparejado con el segundo mejor colegio, y así sucesivamente.

En la siguiente sección, analizaremos el equilibrio de señalización de la primera etapa del CSM. Como mencionamos anteriormente, nos enfocaremos en la caracterización de un equilibrio simétrico en estrategias puras donde todos los estudiantes juegan de acuerdo con la misma estrategia de señalización. Se analizará un juego con $M \geq 1$ escuelas con una sola vacante disponible y $N > M$ estudiantes. Sin embargo, el modelo puede ser extendido con relativa facilidad para analizar cualquier problema con el mismo número de estudiantes y universidades.

4.1. El Equilibrio de Señalización

En esta sección, analizamos el equilibrio de señalización de la primera etapa del CSM. Con el fin de caracterizar este equilibrio, tomamos como dada la asignación de la etapa de emparejamiento de este mecanismo. Para ilustrar cómo se caracterizará este equilibrio, nos enfocaremos en el caso más simple con un solo colegio con calidad $v_1 > 0$ y $N > 1$ estudiantes.

En este contexto, analizaremos un equilibrio de Nash estrictamente separador del juego de señalización jugado por los estudiantes. Este equilibrio está caracterizado por una estrategia de señalización que es una función continua, diferenciable y estrictamente creciente respecto de las habilidades de los estudiantes. Nos enfocamos en el problema del estudiante 1, quien escoge una señal P_1 para informar a los colegios acerca de sus habilidades, mientras que el resto de estudiantes juegan siguiendo la estrategia de señalización $\rho : [0, w] \rightarrow \mathfrak{R}_+$ que se supone es una función estrictamente creciente, continua y diferenciable en α tal que $\rho(0) = 0$.

Dado que el emparejamiento que resulta de la implementación del CSM es asortativo, entonces el estudiante 1 con parámetro α obtiene un pago $v_1 - C(\alpha, P_1)$ siempre que $P_1 > \rho(\alpha_i)$ para todo $i \neq 1$. Esta situación ocurre con probabilidad $\Pr[P_1 > \rho(\alpha_2), \dots, P_1 > \rho(\alpha_N)]$

$= F(\rho^{-1}(P_1))^{N-1}$ dado que las habilidades de los estudiantes son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo con la función de probabilidad F . De otra forma, el estudiante 1 obtiene el pago $-C(\alpha, P_1)$ con probabilidad $1 - F(\rho^{-1}(P_1))^{N-1}$. Por lo tanto, el pago esperado del estudiante 1 con parámetro α , cuando el resto de estudiantes juegan de acuerdo con la función de señalización $\rho(\cdot)$, es:

$$\pi(\alpha, P_1) = v_1 F(\rho^{-1}(P_1))^{N-1} - C(\alpha, P_1) \quad (7)$$

El estudiante 1 toma como dada la estrategia de señalización del resto de estudiantes y escoge una señal P_1 para maximizar su pago esperado $\pi(\alpha, P_1)$. La condición de primer orden (CPO) con respecto a P_1 lleva a lo siguiente,

$$v_1(N-1)F(\rho^{-1}(P_1))^{N-2}f(\rho^{-1}(P_1))\frac{1}{\rho'(\rho^{-1}(P_1))} - \frac{c'(P_1)}{\phi(\alpha)} = 0 \quad (8)$$

Al reordenar la expresión anterior, podemos obtener la siguiente ecuación diferencial,

$$v_1(N-1)\phi(\alpha)F(\rho^{-1}(P_1))^{N-2}f(\rho^{-1}(P_1)) = c'(P_1)\rho'(\rho^{-1}(P_1)) \quad (9)$$

En un equilibrio simétrico, se tiene que $P_1 = \rho(\alpha)$; entonces la ecuación diferencial anterior se convierte en:

$$v_1(N-1)\phi(\alpha)F(\alpha)^{N-2}f(\alpha) = c'(\rho(\alpha))\rho'(\alpha) \quad (10)$$

Al resolver esta ecuación diferencial con la condición inicial $\rho(0) = 0$, encontramos que la estrategia de señalización de equilibrio satisface,

$$\rho(\alpha) = c^{-1}\left(v_1(N-1)\int_0^\alpha \phi(x)F(x)^{N-2}f(x)dx\right) \quad (11)$$

La estrategia de señalización de equilibrio $\rho(\cdot)$ es una función estrictamente creciente, continua y diferenciable en α . Notemos que $\rho(\cdot)$ solamente satisface las CPO del problema

de maximización del estudiante 1, la cual es necesaria más no suficiente para caracterizar el equilibrio del juego. Por lo tanto, es necesario probar que la estrategia de señalización $\rho(\cdot)$ es realmente un equilibrio simétrico. Sabemos que bajo esta estrategia los pagos de cualquier estudiante con parámetro α satisfacen la expresión,

$$\pi(\alpha, \rho(\alpha)) = v_1 F(\alpha)^{N-1} - \frac{c(\rho(\alpha))}{\phi(\alpha)} \quad (12)$$

Es evidente que la función de pagos satisface $\frac{d}{d\alpha}(\pi(\alpha, \rho(\alpha))) > 0$ y $\pi(0, \rho(0)) = 0$. A partir de esta función de pagos, demostraremos que ninguna señal alternativa $P' \neq \rho(\alpha)$ podría ser una desviación beneficiosa para cualquier estudiante con parámetro α . Consideremos que un estudiante con parámetro α está planeando escoger una señal distinta a la que prescribe la estrategia tal que $0 < P' < \rho(\alpha)$, mientras el resto de estudiantes juegan de acuerdo con la estrategia de señalización $\rho(\alpha)$. Dado que la estrategia de señalización es estrictamente creciente en α y satisface $\rho(0) = 0$, debe existir un único valor $0 < \alpha' < \alpha$ tal que $\rho(\alpha') = P'$. Esto implica que un estudiante que escoge una estrategia alternativa $P' = \rho(\alpha')$ obtendrá un pago de $\pi(\alpha, P') = \pi(\alpha, \rho(\alpha'))$. Por lo tanto, un estudiante con parámetro α perderá el pago extra $\pi(\alpha, \rho(\alpha)) - \pi(\alpha, \rho(\alpha'))$ al desviarse con la señal $\rho(\alpha') = P'$. Entonces,

$$\pi(\alpha, \rho(\alpha)) - \pi(\alpha, \rho(\alpha')) = v_1 \left(F(\alpha)^{N-1} - F(\alpha')^{N-1} \right) - \frac{c(\rho(\alpha)) - c(\rho(\alpha'))}{\phi(\alpha)} \quad (13)$$

Por lo que el pago extra $\pi(\alpha, \rho(\alpha)) - \pi(\alpha, \rho(\alpha'))$ se puede reducir a

$$v_1 \left(F(\alpha)^{N-1} - F(\alpha')^{N-1} \right) - \frac{1}{\phi(\alpha)} v_1 (N-1) \int_{\alpha'}^{\alpha} \phi(x) F(x)^{N-2} f(x) dx \quad (14)$$

Debido a que la función $\phi(x)$ es positiva, estrictamente creciente en x , y acotada superiormente en $[0, w]$, es claro que la siguiente desigualdad siempre se sostiene

$$\frac{1}{\phi(\alpha)} v_1 (N-1) \int_{\alpha'}^{\alpha} \phi(x) F(x)^{N-2} f(x) dx < v_1 \int_{\alpha'}^{\alpha} (N-1) F(x)^{N-2} f(x) dx \quad (15)$$

Además, por definición sabemos que $\int_{\alpha'}^{\alpha} (N-1) F(x)^{N-2} f(x) dx = F(\alpha)^{N-1} - F(\alpha')^{N-1}$. Esta última condición implica que la diferencia de pagos $\pi(\alpha, \rho(\alpha)) - \pi(\alpha, \rho(\alpha')) > 0$ para todo $\alpha' < \alpha$ lo que prueba que $P' = \rho(\alpha')$ no es una desviación redituable. Siguiendo un argumento similar, se puede mostrar que cualquier señal alternativa tal que $P'' > \rho(\alpha)$ tampoco puede ser una desviación redituable. Por lo tanto, la estrategia de señalización $\rho(\alpha)$ es un equilibrio simétrico del juego de señalización de los estudiantes. En la siguiente sección, demostraremos que todos estos resultados son validos para un caso general con $M \geq 1$ universidades y $N > M$ estudiantes. Todas las demostraciones y calculos pueden ser encontrados en el Apéndice.

4.1.1. El caso general: $N > M \geq 1$

Ahora consideremos un caso más general con N estudiantes y M universidades tal que $N > M \geq 1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todos los colegios tienen calidades distintas y satisfacen la condición $v_1 > v_2 > \dots > v_M > 0$. Como se realizó anteriormente, analizaremos el problema de maximización del estudiante 1 con parámetro igual a $\alpha \in (0, w)$ mientras que todos los demás estudiantes juegan de acuerdo con una estrategia de señalización $\rho_M : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}_+$. Asimismo, también suponemos que la estrategia de señalización $\rho_M(\cdot)$ es una función continua, estrictamente creciente y diferenciable respecto de α tal que $\rho_M(0) = 0$.

De acuerdo con el esquema anterior, el estudiante 1 escoge una señal $P_1 \geq 0$ para proporcionar información a las universidades acerca de sus habilidades. Entonces, decimos que el estudiante 1 tiene un “acierto” siempre que $P_1 > \rho_M(\alpha_i)$ para algún otro estudiante $i \neq 1$ y que tiene un “fallo” siempre que $P_1 < \rho_M(\alpha_i)$ para algún otro estudiante $i \neq 1$. En este contexto, la probabilidad de tener un “acierto” es $F(\rho_M^{-1}(P_1))$ mientras que la probabilidad de tener un “fallo” es $1 - F(\rho_M^{-1}(P_1))$. Tomemos en cuenta que estas probabilidades son independientes, debido a que los tipos de los estudiantes son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Para cualquier número dado de estudiantes $N > M$, el estudiante 1 con señal P_1 se matricula en la universidad c_j con calidad v_j , siempre que tiene $N - j$ “aciertos” y $j - 1$ “fallos”.

Notemos que esta situación sucede $\binom{N-1}{j-1}$ veces distintas, entonces la probabilidad de matricularse en el colegio c_j es:

$$\binom{N-1}{j-1} F\left(\rho_M^{-1}(P_1)\right)^{N-j} \left[1 - F\left(\rho_M^{-1}(P_1)\right)\right]^{j-1} \quad (16)$$

El argumento anterior implica que la probabilidad de matricularse en el colegio $c_j \in C$ sigue una distribución de probabilidad binomial. Por lo tanto, el pago esperado del estudiante 1, $\pi(\alpha, P_1)$, satisface la expresión,

$$\pi(\alpha, P_1) = \sum_{k=1}^M v_k \binom{N-1}{k-1} F\left(\rho_M^{-1}(P_1)\right)^{N-k} \left[1 - F\left(\rho_M^{-1}(P_1)\right)\right]^{k-1} - C(\alpha, P_1) \quad (17)$$

El estudiante 1 toma como dada la estrategia de señalización del resto de estudiantes y escoge una señal P_1 que maximiza su pago esperado $\pi(\alpha, P_1)$. En el Apéndice A, se resuelve el problema de maximización de estudiante 1 en un equilibrio simétrico donde todos los estudiantes juegan de acuerdo con la misma estrategia de señalización $\rho_M(\alpha)$. Asimismo, mostramos que la función de señalización que satisface la CPO del dicho problema de maximización del estudiante 1 caracteriza el equilibrio simétrico y estrictamente separador que buscamos para este juego. Así, podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 2 *La estrategia de señalización,*

$$\rho_M(\alpha) = c^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \int_0^\alpha \phi(x) f_{(k, N-1)}(x) dx + v_M \int_0^\alpha \phi(x) f_{(M, N-1)}(x) dx \right)$$

es un equilibrio simétrico del problema de admisiones a la universidad con $M \geq 1$ colegios y $N > M$ estudiantes.

Demostración. Ver Apéndice A. ■

Dada la estrategia de señalización de equilibrio $\rho_M(\cdot)$, un estudiante con parámetro α

obtendrá un pago esperado de:

$$\pi(\alpha, \rho_M(\alpha)) = \sum_{k=1}^M v_k \binom{N-1}{k-1} F(\alpha)^{N-k} [1 - F(\alpha)]^{k-1} - \frac{c(\rho_M(\alpha))}{\phi(\alpha)} \quad (18)$$

Notemos que para caracterizar el equilibrio del juego de señalización, asumimos algunas propiedades deseables de dicha estrategia de equilibrio. Por lo tanto, es necesario mostrar que tales características realmente se sostienen en el equilibrio. Es fácil notar que la estrategia de señalización de equilibrio y los pagos de los agentes son funciones continuas y diferenciables en α . Además de lo anterior, en la siguiente proposición demostramos algunas propiedades adicionales de la estrategia de señalización y los pagos de equilibrio.

Proposición 3 *La estrategia de señalización de equilibrio $\rho_M(\alpha)$ y los pagos de los estudiantes $\pi(\alpha, \rho_M(\alpha))$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\rho_M(\alpha)$ es estrictamente creciente en α y acotada superiormente.
2. $\pi(\alpha, \rho_M(\alpha))$ es estrictamente creciente en α .

Demostración. Ver Apéndice A. ■

Dado que la estrategia de señalización de equilibrio es una función estrictamente creciente y la probabilidad de que dos estudiantes distintos tengan las mismas habilidades es cero, es claro que ningún par de estudiantes distintos escogerá la misma estrategia en equilibrio. Por lo tanto, el emparejamiento de equilibrio del CSM será asortativo con respecto a las verdaderas habilidades de los estudiantes. Es decir, el estudiante con mayores habilidades estará emparejado con la mejor universidad; el segundo mejor estudiante estará emparejado con la segunda mejor universidad; y así sucesivamente. Además, los estudiantes con mayores habilidades obtendrán mayores pagos. Este último resultado se deriva de la “propiedad de cruce único” de la función de costos de los estudiantes, dado que los estudiantes con mayores habilidades son también los que enfrentan menores costos para señalar sus habilidades.

Por otro lado, la estructura asortativa del emparejamiento de equilibrio del CSM implica que los pagos de las universidades dependen de la posición en el ranking de sus estudian-

tes y la distribución de probabilidad de las habilidades. Sea μ^* el único emparejamiento de equilibrio del CSM, entonces, los pagos esperados de los colegios satisfacen,

$$EQ_{c_j}^* = E[\alpha \mid P_{\mu^*(c)}] = E[\alpha_{(j,N)}] = \int_0^w \alpha f_{(j,N)}(\alpha) d\alpha \text{ para } j = 1, \dots, M. \quad (19)$$

Donde $\alpha_{(j,N)}$ es la j -ésima estadística de orden de una muestra de tamaño N de la distribución de habilidades, tal que $\alpha_{(1)} = \max_{1 \leq i \leq N} \alpha_i$, $\alpha_{(2)}$ = segundo mayor α_i , y así sucesivamente. Es bien sabido que la estadística de orden $\alpha_{(j,N)}$ sigue una distribución dada por la función de densidad,

$$f_{(j,N)}(\alpha) = \frac{N!}{(j-1)!(N-j)!} f(\alpha) F(\alpha)^{N-j} [1 - F(\alpha)]^{j-1} \text{ para } j = 1, \dots, M. \quad (20)$$

Dada la notación anterior, decimos que los colegios responden a las señales de los estudiantes si las universidades ordenan a los estudiantes del mejor al peor basadas en las señales que reportan los estudiantes. Bajo las condiciones anteriores, es fácil mostrar que responder a las señales de los estudiantes es una mejor respuesta para las universidades. En primer lugar, se puede mostrar que la mejor estrategia para cualquier colegio c_j es responder a las señales de los estudiantes, siempre que todos las escuelas de mayor calidad que ella, es decir $\{c_1, c_2, \dots, c_{j-1}\}$, lo hacen. El argumento es muy simple, la universidad c_j tiene que comparar las habilidades esperadas de sus estudiantes seleccionados con base en las señales de sus habilidades o bajo cualquier otra regla de admisión. Notemos que la universidad c_j sabe que cualquier estudiante está dispuesto a aceptar una oferta suya, excepto aquellos que tienen ofertas de colegios de mayor calidad $\{c_1, c_2, \dots, c_{j-1}\}$, dado que suponemos que estos colegios responden a las señales de los estudiantes. Esto implica que cualquier estudiante que potencialmente acepte una oferta del colegio c_j tendrá unas habilidades tales que $\alpha \leq \alpha_{(j)}$. Por lo tanto, al responder a las señales de los estudiantes, la universidad c_j matriculará al mejor estudiantes entre los que tiene disponibles. En contraste, bajo cualquier otra regla de admisión matriculará a un estudiante con menores habilidades.

Ahora consideremos el caso del mejor colegio, c_1 . Este sabe que su oferta será aceptada

por cualquier estudiante. Por lo tanto, al responder a las señales de los estudiantes el colegio c_1 matriculará al mejor estudiante de los que hay disponibles. Entonces, un argumento simple basado en la inducción muestra es que es óptimo para todos los colegios responder a las señales de los estudiantes.

5. Estática Comparativa

En las secciones anteriores, se caracterizó un equilibrio simétrico estrictamente separador del juego de señalización inducido por el CSM. Este equilibrio está caracterizado por una estrategia de señalización que depende de diversos parámetros del modelo, tales como la distribución de habilidades, el número de estudiantes, el número de plazas disponibles en las escuelas y la calidad de los colegios. Nuestra caracterización explícita del equilibrio nos permite llevar a cabo una serie de ejercicios de estática comparativa con el fin de analizar el impacto del cambio en los parámetros subyacentes del modelo sobre la estrategia de señalización de equilibrio. En particular, nos enfocamos en tres casos:

1. Un cambio en el número de estudiantes;
2. Un cambio en el número de plazas disponibles en las escuelas; y
3. Un cambio en la calidad de los colegios.

El análisis de estos ejercicios de estática comparativa es de utilidad para entender los mecanismos de emparejamiento que observamos en la vida real, por ejemplo, las admisiones a la universidad, como un problema de señalización cuyo resultado depende de la interacción de agentes que actúan estratégicamente. Adicionalmente, nuestro modelo puede proporcionar una buena aproximación para analizar los efectos de los cambios en los parámetros sobre las estrategias de equilibrio de los agentes.

Una de las señales más importantes en el proceso de admisión a la universidad en Estados Unidos (E.U.A.) es la prueba estandarizada SAT. La mayoría de los estudiantes del último año del bachillerato realizan la prueba del SAT con el fin de aplicar a la universidad.

Asimismo, las mayoría de las universidades usan estos exámenes estandarizados para tomar sus decisiones de admisión. Diversos estudios empíricos han analizado la importancia del SAT en las admisiones universitarias de E.U.A., proporcionando soporte empírico de que nuestro modelo de admisiones universitarias descentralizado con información incompleta y señalización costosa es una buena aproximación para analizar procesos de emparejamiento del mundo real tales como las admisiones a la universidad de E.U.A. Primero, el SAT es una señal costosa que depende del esfuerzo aplicado por los estudiantes. Segundo, es bien sabido que existe una fuerte correlación positiva entre el SAT y las habilidades académicas de los estudiantes. Por ejemplo, Frey y Detterman (2004) muestran que hay una alta correlación entre los resultados del SAT y diversas medidas del intelecto como las pruebas de IQ. Finalmente, el emparejamiento entre universidades y estudiantes tiende a ser asortativo con respecto a las habilidades de los estudiantes, dado que las mejores universidades tienden a matricular a los estudiantes con mejores resultados en el SAT (Webster, 2001a, 2001b).

Es claro que un entendimiento incorrecto del juego de señalización que subyace el proceso de emparejamiento descentralizado de las admisiones a la universidad, puede llevar a elaborar recomendaciones de política inadecuadas. Por ejemplo, la evidencia empírica en E.U.A. muestra que hay una caída en la calificación promedio del SAT a medida que la tasa de participación en la prueba estandarizada aumenta. Si simplemente consideráramos la alta correlación positiva entre el SAT y diversas medidas de las habilidades académicas de los estudiantes, podríamos sugerir que la contracción en el SAT promedio está asociado a un incremento de la proporción de candidatos con bajas habilidades académicas, lo que implicaría un cambio en la distribución de las habilidades de los estudiantes que realizan la prueba para aplicar a la universidad. De acuerdo con este argumento, una recomendación de política podría ser incrementar la ayuda económica, y la duración del entrenamiento para el SAT, así como las tutorías en el bachillerato para mejorar las habilidades de los examinados. Sin embargo, el argumento anterior y su recomendación de política ignoran el juego de señalización que subyace el proceso de admisión a la universidad, dado que no se considera, que al enfrentar a nuevos competidores, los estudiantes pueden reaccionar estratégicamente disminuyendo o incrementando su inversión en señalización sin cambiar la distribución original de

las habilidades académicas de los estudiantes.

5.1. Un Cambio en el Número de Estudiantes

En esta sección, analizaremos el efecto de un cambio en el número de estudiantes sobre la estrategia de señalización de equilibrio del CSM. Intuitivamente, esperamos que un incremento de la competencia por un número fijo de plazas escolares reduzca la probabilidad de matricularse en la universidad, lo cual a su vez llevaría a reducir la inversión en señalización. En principio, esta intuición parecería correcta; sin embargo, esta no considera que el efecto de incrementar la competencia sobre la probabilidad de matricularse en la escuela pudiera ser asimétrico para los jugadores. Por ejemplo, ante un nuevo estudiante que busca ser aceptado en una universidad la probabilidad de enfrentar competidores más calificados es alta para los estudiantes con bajas habilidades y es baja para los estudiantes que tienen mayores habilidades debido a su posición en la distribución. Esta asimetría en el grado de competencia esperada podría llevar a los estudiantes a reaccionar de diferente forma dependiendo de sus habilidades ante la presencia de nuevos estudiantes. Esto último podría llevar a observar un efecto asimétrico sobre la estrategia de señalización de equilibrio.

Con el fin de simplificar nuestro argumento y hacerlo lo más intuitivo que sea posible, consideramos un caso muy simple con solo un colegio con un número fijo de plazas escolares y un número creciente de estudiantes.¹⁴ En este contexto, la estrategia de señalización de equilibrio satisface la siguiente especificación:

$$\rho_M(\alpha, N) = c^{-1} \left(v_1 \int_0^\alpha \phi(x) f_{(M, N-1)}(x) dx \right) \quad (21)$$

¹⁴En este caso particular, analizamos un problema de emparejamiento muchos-a-uno donde los colegios tienen preferencias responsivas sobre el conjunto de estudiantes. Bajo estas condiciones el concepto adecuado de estabilidad es el de estabilidad por grupos, (es decir, un emparejamiento es estable si no es bloqueado por ninguna coalición de agentes) en lugar de la estabilidad por pares utilizada en los problemas de emparejamiento uno-a-uno. Sin embargo, es fácil mostrar que cuando las preferencias son responsivas, un emparejamiento es estable por grupos si y solo si es estable por pares en un problema de emparejamiento uno-a-uno que es derivado apropiadamente del problema muchos-a-uno original (Roth and Sotomayor, 1991). Intuitivamente, un problema muchos-a-uno con preferencias responsivas es equivalente a un problema uno-a-uno donde cada plaza escolar es considerada como una universidad con las mismas preferencias sobre los estudiantes y un solo lugar disponible, y cada estudiante usa cualquier regla arbitraria estricta para romper los empates entre las diferentes escuelas.

El resultado de este ejercicio de estática comparativa muestra que el efecto de una mayor competencia sobre la inversión en señalización depende de las habilidades académicas de los estudiantes. Formalmente,

Proposición 4 *Para cualquier problema de admisión a la universidad con una universidad con $M \geq 1$ plazas escolares y $N > M$ estudiantes, existe un umbral $\alpha_N(N)$ bien definido, tal que lo siguiente se sostiene:*

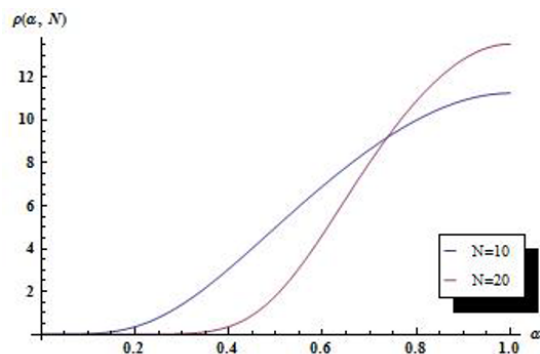
1. $\rho_M(\alpha, N + 1) < \rho_M(\alpha, N)$ para todo $\alpha < \alpha_N(N)$;
2. $\rho_M(\alpha, N + 1) \geq \rho_M(\alpha, N)$ para todo $\alpha \geq \alpha_N(N)$; y
3. $\alpha_N(N)$ es estrictamente creciente en N .

Demostración. Ver Apéndice B. ■

De acuerdo con el resultado anterior, encontramos que los estudiantes con menores habilidades reducen su inversión en señalización, mientras que para los de mayores habilidades aumenta cuando la competencia por las plazas escolares es mayor. Un estudiante con parámetro α obtiene una vacante en la universidad c_1 con probabilidad $\binom{N-1}{M-1} F(\alpha)^{N-M} [1 - F(\alpha)]^{M-1}$. Cuando la competencia por las vacantes aumenta, podemos identificar dos efectos opuestos sobre la probabilidad de matricularse. Por un lado, la probabilidad de obtener una vacante en el colegio c_1 sobre los otros $N - M$ estudiantes se reduce cuando N se incrementa. Como consecuencia de lo anterior, los estudiantes ajustan su esfuerzo y reducen su inversión en señalización. Por otro lado, el número de eventos $\binom{N-1}{M-1}$ donde un estudiante con parámetro α debería ganar a otros $N - M$ competidores se incrementa a medida que N aumenta. Lo anterior implica que un estudiante debe incrementar su inversión en señalización para obtener una vacante en el colegio c_1 . Por lo tanto, el efecto neto depende de las habilidades de los estudiantes. Para los estudiantes poco calificados el efecto neto es negativo, mientras que para los estudiantes más hábiles dicho efecto neto es positivo.

Una segunda implicación interesante del modelo alude al comportamiento de la inversión promedio en señalización. Sea $R(N) = \int \rho_M(\alpha, N) f(\alpha) d\alpha$ el valor esperado de la inversión en señalización. Nuestro resultado anterior, muestra que el efecto de la competencia sobre

Figura 1: Efecto de incrementar el número de estudiantes

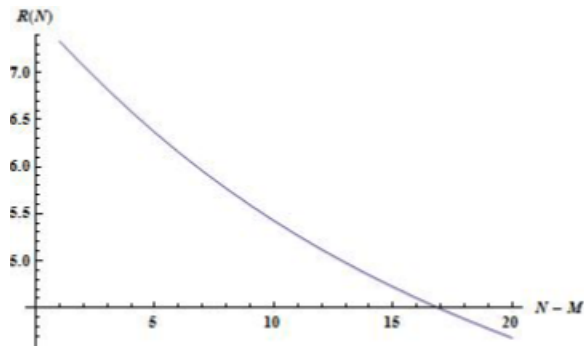


Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución exponencial de las habilidades de los estudiantes con función de probabilidad acumulada $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ y valor esperado $E[\alpha] = \theta=1$. Para simplificar, consideramos un modelo con una universidad y una vacante.

$R(N)$ es, en general, ambiguo, dado que la fracción de estudiantes $\alpha_N(N)$ reduce su inversión en señalización, mientras que el resto de estudiantes $w - \alpha_N(N)$ la aumenta, cuando hay más competencia. Sin embargo, la monotonicidad del umbral $\alpha_N(N)$ en conjunto con algunas de las propiedades de la estrategia de señalización de equilibrio $\rho_M(\alpha, N)$ proporcionan una idea clara del comportamiento de $R(N)$ en condiciones de una competencia suficientemente alta por un número fijo de vacantes escolares.

En primer lugar, el umbral $\alpha_N(N)$ es estrictamente creciente en N , lo que implica que la masa de estudiantes $w - \alpha_N(N)$ que están dispuestos a incrementar su inversión en señalización ante nuevos competidores es decreciente y se convierte en un conjunto de medida igual a cero en el límite cuando N tiende a infinito. Además, la monotonicidad de $\alpha_N(N)$ también implica que aquellos estudiantes que redujeron su inversión en señalización con N competidores en el juego nunca la incrementarán con $N + 1$ estudiantes. En segundo lugar, la estrategia de señalización de equilibrio $\rho_M(\alpha, N)$ es creciente en α y acotada superiormente por una cota superior $\bar{\rho} = c^{-1}(v_1\phi(w))$ que es independiente de N y M . Esto último implica que los estudiantes en el conjunto $w - \alpha_N(N)$ no pueden incrementar su inversión en señalización por encima de la cota superior $\bar{\rho}$. De acuerdo con el argumento anterior, debe existir

Figura 2: Inversión promedio en señalización con respecto a N



Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución exponencial de las habilidades de los estudiantes con función de probabilidad acumulada $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ y valor esperado $E[\alpha] = \theta=1$. Para simplificar, consideramos un modelo con una universidad y una vacante.

una demanda suficientemente grande por las vacantes escolares, tal que el incremento en la señal $\rho_M(\alpha, N)$ hecho por los estudiantes $w - \alpha_N(N)$ no puede compensar la reducción hecha por los estudiantes $\alpha_N(N)$, llevando a una caída agregada en $R(N)$. Formalmente, debe existir un número de estudiantes suficientemente grande \hat{N} tal que $R(N+1) < R(N)$ para todo $N \geq \hat{N}$.

El argumento anterior es consistente con un hecho estilizado del proceso de admisiones a la universidad de E.U.A. En ese país, ha sido ampliamente analizado el impacto de incrementar el número de aplicantes sobre la calificación promedio del SAT. De acuerdo con los datos recabados por el “College Board” de E.U.A. para diversos años, se ha observado una caída en la calificación promedio del SAT a medida que se incrementa la tasa de participación de los estudiantes para realizar la prueba estandarizada. El “College Board” de E.U.A. explica este hecho estilizado de la siguiente manera: ¹⁵

“It is common for mean scores to decline slightly when the number of students taking an exam increases because more students of varied academic backgrounds are represented in

¹⁵College board (2011), “43 % of 2011 College-Bound Senior Met SAT College and Career Readiness Benchmark” at <http://press.collegeboard.org/releases/2011/43-percent-2011-college-bound-seniors-met-sat-college-and-career-readiness-benchmark>

the test-taking pool.”

Esta interpretación del “*College Board*” de E.U.A. implica que un incremento en el número de estudiantes que realizan el SAT sistemáticamente aumenta la proporción de estudiantes con menores habilidades para resolver la prueba. Al considerar, la fuerte correlación positiva entre el SAT y diversas medidas de las habilidades académicas de los estudiantes, la observación anterior implica que se da un cambio en la distribución subyacente de probabilidad de las habilidades académicas de los estudiantes cuando se incrementa la competencia por las vacantes escolares disponibles. Sin embargo, esta interpretación no considera el juego de señalización presente en las admisiones a la universidad y la posibilidad de que los estudiantes cambien estratégicamente su inversión en señalización cuando tienen que competir con un mayor número de candidatos por un número fijo de plazas escolares. Nuestro modelo sugiere que una mayor competencia no solo lleva a que los estudiantes con menores habilidades académicas reduzcan su inversión en señalización, como respuesta a la caída en la probabilidad de ser aceptado por alguna universidad, sino que también decrece la proporción de los estudiantes con mayores hábiles que están dispuestos a incrementar su inversión cuando está en la misma situación.

5.2. Un Cambio en el Número de Vacantes en los Colegios

En el siguiente ejercicio se analiza el efecto de un cambio en el número de plazas escolares sobre la estrategia de señalización de equilibrio. Para simplificar, consideramos un modelo donde el número de vacantes se puede incrementar sin rebasar el número de estudiantes. Intuitivamente, un incremento de las vacantes disponibles en las universidades debería incrementar la probabilidad de matricularse en la universidad, llevando a los estudiantes a incrementar su inversión en señalización.

Nuestro modelo muestra que esta intuición podría no ser correcta, al menos no para todos los estudiantes. El efecto de un cambio en el número de vacantes podría no ser simétrico. Como en el ejercicio anterior de estática comparativa, consideramos un caso muy simple con N estudiantes y un colegio que ofrece $M \geq 1$ vacantes. En este contexto, no es difícil mostrar

que la estrategia de señalización de equilibrio del problema satisface la siguiente expresión,

$$\rho_M(\alpha, M) = c^{-1} \left(v_1 \int_0^\alpha \phi(x) f_{(M, N-1)}(x) dx \right) \quad (22)$$

Por lo tanto, podemos establecer el siguiente resultado.

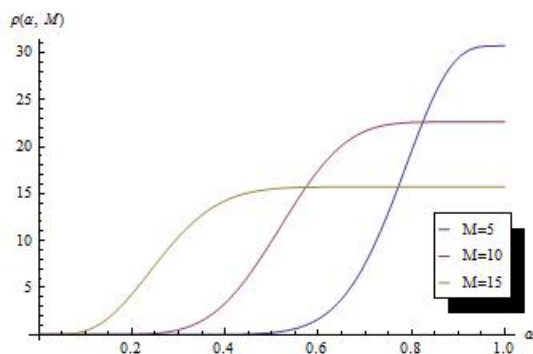
Proposición 5 *Para cualquier problema de admisiones a la universidad con un colegio con $M \geq 1$ vacantes y $N > M$ estudiantes, existe un umbral $\alpha_M(M)$ bien definido, tal que se sostiene lo siguiente:*

1. $\rho_M(\alpha, M + 1) > \rho_M(\alpha, M)$ para todo $\alpha < \alpha_M(M)$;
2. $\rho_M(\alpha, M + 1) \leq \rho_M(\alpha, M)$ para todo $\alpha \geq \alpha_M(M)$; y
3. $\alpha_M(M)$ es estrictamente decreciente en M .

Demostración. Ver Apéndice B. ■

Como en el ejercicio anterior, un cambio en el número de vacantes afecta la probabilidad de ser aceptado por algún colegio $\binom{N-1}{M-1} F(\alpha)^{N-M} [1 - F(\alpha)]^{M-1}$. Una vacante adicional tiene dos efectos sobre dicha probabilidad. Primero, incrementa la probabilidad de tener $N - M$ éxitos y también reduce la probabilidad de tener $M - 1$ fallos, el efecto neto depende de las habilidades de los estudiantes. Decimos que un estudiante con parámetro α es bueno si $\frac{1-F(\alpha)}{F(\alpha)} < 1$, de otra forma decimos que el estudiante es malo. Dada esta notación, para un buen estudiante el efecto neto de una vacante adicional es negativo, mientras que para los malos estudiantes es positivo. Segundo, un incremento en el número de vacantes afecta el número de eventos en los que el estudiante es asignado a una plaza escolar, es decir $\binom{N-1}{M-1}$. Cuando hay una nueva vacante, este número de eventos se incrementa si M es relativamente pequeño respecto de N y decrece en otro caso. De acuerdo con el argumento anterior, el efecto neto sobre la probabilidad de matricularse en la universidad depende de las habilidades de los estudiantes y del número de vacantes relativo al número de estudiantes. Nuestros resultados muestran que un incremento de las vacantes hace que los estudiantes menos capacitados

Figura 3: Efecto de incrementar el número de vacantes escolares M



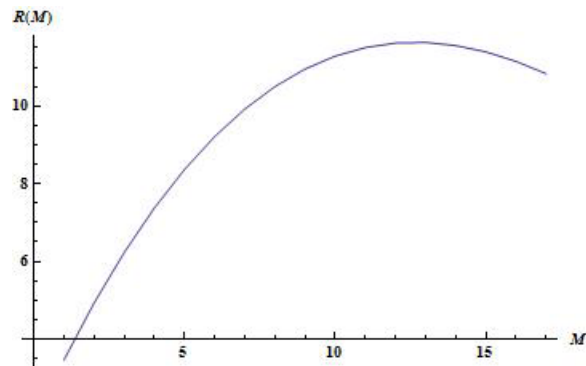
Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución exponencial de las habilidades de los estudiantes con función de probabilidad acumulada $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ y valor esperado $E[\alpha] = \theta = 1$. Para simplificar, consideramos un modelo con $N=20$.

aumenten su inversión en señalización, mientras que los estudiantes con mayores habilidades la disminuyen. Intuitivamente, un incremento en el número de plazas disponibles en los colegios es equivalente a una reducción de la competencia por ingresar a la universidad.

El umbral $\alpha_M(M)$ es estrictamente decreciente en M , es decir, $\alpha_M(M+1) < \alpha_M(M)$ para $M < N$. Este resultado implica que la masa de estudiantes que están dispuestos a incrementar su inversión en señalización se reduce cuando hay más vacantes disponibles mientras que, la proporción de estudiantes que reduce su inversión aumenta. Esta propiedad del umbral $\alpha_M(M)$ nos permite inferir algunas conclusiones respecto de la forma de la inversión promedio en señalización del modelo como función del número de vacantes en las universidades.

Dado que el efecto de una vacante adicional no es ambiguo para buenos y malos estudiantes y es independiente del número de plazas totales M y de estudiantes N , su efecto sobre la estrategia de equilibrio depende principalmente del comportamiento de la función binomial $\binom{N-1}{M-1}$. A medida que el número de vacantes escolares se incrementa, la función binomial también lo hace hasta alcanzar un valor máximo; posteriormente vacantes adicionales reducen la función binomial. Intuitivamente, cuando M es pequeño en relación con N , una plaza escolar adicional es muy valiosa para los estudiantes, lo que lleva a algunos de los buenos estudiantes a incrementar su inversión en señalización. En contraste, cuando el número de

Figura 4: Inversión promedio en señalización con respecto a M



Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución exponencial de las habilidades de los estudiantes con función de probabilidad acumulada $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ y valor esperado $E[\alpha] = \theta = 1$. Para simplificar, consideramos un modelo con $N=20$.

vacantes es muy cercano al de estudiantes, una nueva plaza escolar no es tan valiosa como cuando son más escasas, lo que lleva incluso a algunos de los malos estudiantes a reducir su inversión en señalización. Por lo tanto, al incrementarse las vacantes escolares desde un número pequeño, la inversión promedio en señalización se incrementará hasta alcanzar un máximo, a partir del cual cualquier vacante adicional reducirá dicha inversión promedio.

5.3. Un Cambio en la Calidad de los Colegios

En esta sección, analizamos el efecto de un cambio en la calidad de las universidades sobre la estrategia de señalización de equilibrio. Nos enfocamos en el análisis de un cambio en la calidad relativamente pequeño en el sentido de que preserva las preferencias ordinales de los estudiantes. Así, si el colegio c_k cambia su calidad de v_k a v'_k , debe ser cierto que $v_{k-1} > v'_k > v_{k+1}$, siempre que $v_{k-1} > v_k > v_{k+1}$. Este supuesto hace que las estrategias de equilibrio sean comparables antes y después de cambio en la calidad de la universidad, dado que el emparejamiento de equilibrio del CSM es el mismo en ambas situaciones.

Intuitivamente, cuando una escuela incrementa su calidad, esto lleva a que aumente la calidad promedio. Este hecho incrementa también las valoraciones de los estudiantes, por lo

que es razonable que incremente su inversión en señalización. Sin embargo, como en los dos ejercicios anteriores, este resultado también depende de las habilidades de los estudiantes. Sea $sgn(x)$ una función tal que $sgn(x) = 1$ si $x > 0$, $sgn(x) = -1$ si $x < 0$ y $sgn(x) = 0$ si $x = 0$. Entonces podemos establecer el siguiente resultado.

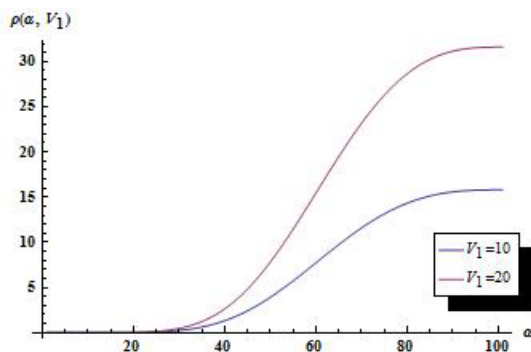
Proposición 6 *Para cualquier problema de admisiones a las universidad con $M \geq 2$ universidades y $N > M$ estudiantes, existe un umbral $\alpha_{v_k}(N, k)$ bien definido, tal que se sostiene lo siguiente:*

1. $sgn(\rho_M(\alpha, v'_k) - \rho_M(\alpha, v_k)) = sgn(v'_k - v_k)$ para todo $\alpha < \alpha_{v_k}(N, k)$ y $k = 1, \dots, M$;
2. $sgn(\rho_M(\alpha, v'_k) - \rho_M(\alpha, v_k)) = -sgn(v'_k - v_k)$ para todo $\alpha > \alpha_{v_k}(N, k)$ y $k = 1, \dots, M$;
y
3. $\alpha_{v_k}(N, k)$ es estrictamente creciente en N para todo $k = 2, \dots, M$ y estrictamente decreciente en k .

Demostración. Ver Apéndice B. ■

El resultado anterior implica que los estudiantes menos calificados y los mejor calificados cambian su inversión en señalización en direcciones opuestas cuando se incrementa la calidad de los colegios. Intuitivamente, un incremento en la calidad de las universidades es más valioso para los estudiantes con menores habilidades que para aquellos que tienen mayores capacidades académicas. También mostramos que el umbral $\alpha_{v_k}(N, k)$ es decreciente en k , es decir, $\alpha_{v_k}(N, k+1) < \alpha_{v_k}(N, k)$ para todo $k = 1, \dots, M-1$, lo que implica que los estudiantes están más dispuestos a incrementar su inversión cuando cambia la calidad de los colegios de alta calidad. Adicionalmente, en el Apéndice B mostramos que $\alpha_{v_1}(N, 1) = w$ para cualquier N , lo que implica que solamente el incremento de la calidad del colegio c_1 no genera asimetrías en el comportamiento de la inversión en señalización de los estudiantes, debido a que todos incrementan o disminuyen su inversión ante un aumento o reducción de la calidad de dicha universidad, respectivamente.

Figura 5: Un cambio en la calidad del mejor colegio



Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución exponencial de las habilidades de los estudiantes con función de probabilidad acumulada $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ y valor esperado $E[\alpha] = \theta = 1$. Para simplificar, consideramos un modelo con $N=20$ y $M=10$.

6. Ganancias del CSM

En las secciones anteriores, caracterizamos dos tipos de equilibrio del CSM. Un equilibrio agrupador sin señalización y un equilibrio estrictamente separador con señalización costosa. Ambos equilibrios tienen diversas propiedades acerca del emparejamiento que inducen y los pagos de los agentes que permiten entender el papel de la información incompleta y la señalización costosa en este tipo de problemas de emparejamiento descentralizado. En esta sección, presentamos un análisis simple que compara ambos tipos de equilibrio con el fin de verificar si al incluir la señalización costosa se alcanzan ganancias o pérdidas de bienestar para los agentes en relación a un modelo sin señalización. Intuitivamente, tanto los estudiantes con menores habilidades, como los colegios de menor calidad preferirán el equilibrio sin señalización, debido a que tienen la posibilidad de resultar emparejados con mejores agentes que en el modelo con señalización costosa donde el emparejamiento de equilibrio es asortativo. Adicionalmente, en un contexto con señalización costosa, los estudiantes deben asumir un costo que hace aún más restrictivo alcanzar pagos superiores a los del modelo sin señalización, incluso para los estudiantes más calificados.

De acuerdo con el argumento anterior, los agentes pueden experimentar ganancias o pér-

didadas con la implementación del CSM con señales costosas en relación al mismo mecanismo sin señalización. En este sentido, definimos las ganancias de utilizar la señalización costosa bajo el CSM de una manera natural como la diferencia entre los pagos de equilibrio (separador y agrupador) de los agentes. Así, las ganancias de los estudiantes satisfacen la siguiente expresión,

$$L(\alpha) = \pi(\alpha, \rho_M(\alpha)) - EU(N, M) \quad (23)$$

Dado que los pagos de los estudiantes sin señalización $EU(N, M)$ son independientes del tipo de estos agentes, es decir, del parámetro que caracteriza sus habilidades, sus ganancias son estrictamente crecientes en α . Además, sabemos que los pagos de equilibrio satisfacen $\pi(0, \rho_M(0)) = 0$ y $EU(N, M) > 0$. Por lo tanto, siempre existe una masa de estudiantes que experimenta pérdidas en esta comparación de pagos de equilibrio del CSM. Notemos que solo los estudiantes con mayores habilidades son los únicos que tienen la posibilidad de obtener ganancias positivas, dependiendo de la combinación de los parámetros del modelo.

De manera similar, las ganancias de las universidades c_j se definen de la siguiente manera,

$$\Delta EQ(j, N) = EQ_{c_j}^* - EQ_{c_j} \text{ for } j = 1, \dots, M. \quad (24)$$

Donde $EQ_{c_j}^* = E[\alpha_{(j)}]$ es el pago en el equilibrio separador y $EQ_{c_j} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} E[\alpha]$ es el pago en el equilibrio agrupador para c_j . Como en el caso anterior, el comportamiento de las ganancias de las universidades depende de la distribución de las habilidades de los estudiantes y otros parámetros del modelo, como el número de estudiantes y vacantes de los colegios.

Bajo ambos tipos de equilibrio del CSM, un mayor número de estudiantes incrementa los pagos de los colegios. En el caso del equilibrio sin señalización los pagos se incrementan debido a que se reduce la probabilidad de que los colegios se mantengan sin emparejar. A su vez, con señalización costosa, el incremento en el número de estudiantes mejora la probabilidad de matricular a un mejor estudiante, lo cual se traduce en una mejora de los pagos de los colegios. Por otro lado, sin mayor información, no es claro cuáles colegios obtienen las mayores ganancias o si estas ganancias están relacionadas con la calidad de las escuelas de

forma monotónica.

Con el fin de analizar las ganancias de los colegios en el CSM, es necesario caracterizar los momentos de las estadísticas de orden de la distribución de las habilidades de los estudiantes. Esta es una tarea que puede ser muy complicada, debido a que la mayoría de las distribuciones de probabilidad no tienen soluciones cerradas para los momentos de sus estadísticas de orden. Por lo tanto, nos enfocamos en un caso particular, la distribución exponencial, cuyos momentos de sus estadísticas de orden tienen una solución cerrada.¹⁶ Entonces, consideramos el modelo exponencial,¹⁷ donde $E[\alpha_{(j)}] = \sum_{k=1}^{N+1-j} \frac{\theta}{N+1-k}$ para $j = 1, \dots, M$ and $E[\alpha] = \theta$ (Huang, 1974). Bajo estos supuestos, las ganancias de los colegios $\Delta EQ(j, N)$ satisfacen la siguiente expresión,

$$\Delta EQ(j, N) = \theta \sum_{k=1}^{N+1-j} \frac{1}{N+1-k} - \theta \left(\frac{N-1}{N} \right)^{j-1} \quad (25)$$

Entonces, podemos establecer el siguiente resultado.

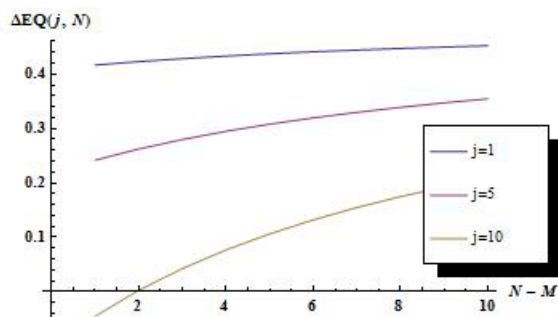
Proposición 7 *Consideramos cualquier problema de admisiones a la universidad con M universidades y N estudiantes tal que $N > M \geq 1$. Supongamos que las habilidades de los estudiantes se distribuyen exponencialmente con parámetro $\theta > 0$. Entonces, lo siguiente se sostiene:*

1. $\Delta EQ(j, N)$ es estrictamente creciente en N , es decir $\Delta EQ(j, N+1) > \Delta EQ(j, N)$ para todo $N > M$ y $j = 1, \dots, M$;
2. $\Delta EQ(j, N)$ es estrictamente decreciente en j , es decir $\Delta EQ(j+1, N) < \Delta EQ(j, N)$ para todo $N > M$ y $j = 1, \dots, M-1$; and
3. Para cualquier $M \geq 1$ siempre existe un $N^* > M$ tal que $\Delta EQ(j, N) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, M$ y todo $N \geq N^*$.

¹⁶Los mismos resultados y conclusiones se pueden obtener con la distribución uniforme, para la cual también existen soluciones cerradas de los momentos de sus estadísticas de orden.

¹⁷Es decir, las habilidades de los estudiantes están distribuidas exponencialmente con parámetro $\theta > 0$, si α se distribuye de acuerdo con la función de densidad $f(\alpha; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$. En este caso, la función de distribución acumulada es $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$. Además, $E[\alpha] = \theta$ (Casella and Berger, 2002).

Figura 6: Ganancias de los colegios con las habilidades de los estudiantes distribuidas exponencialmente

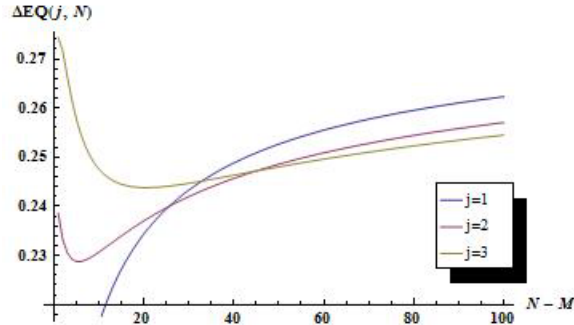


Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución exponencial de las habilidades de los estudiantes con función de probabilidad acumulada $F(\alpha; \theta) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ y valor esperado $E[\alpha] = \theta=1$. Para simplificar, consideramos un modelo con $N=20$ y $M=10$.

Demostración. Ver Apéndice C. ■

El resultado anterior tiene implicaciones interesantes. Primero, una demanda creciente por vacantes escolares mejora las ganancias de los colegios. Intuitivamente, un incremento en la cantidad de estudiantes lleva a los colegios a reducir el riesgo de no emparejarse, además de que la señalización costosa se hace más efectiva para seleccionar a los mejores estudiantes entre todos los que aplican y están disponibles. Otra implicación interesante tiene que ver con la compación de las ganancias a través de las universidades. Como en el caso de los estudiantes, las ganancias de las escuelas se pueden ordenar de acuerdo con la calidad del colegio. Este resultado implica que el gran ganador del CSM es la universidad de máxima calidad, la cual no solo se empareja con el mejor estudiante, sino también obtiene la mayor ganancia de la implementación del mecanismo de señalización costosa. Una tercera implicación nos permite entender la relación entre el tamaño de la demanda por plazas escolares y las ganancias de las escuelas. Encontramos que una demanda suficientemente grande por estas vacantes lleva a todas las universidades a tener ganancias positivas. Este resultado contrasta con el caso de los estudiantes donde siempre hay una proporción que, independientemente de los parámetros del modelo, obtienen pérdidas.

Figura 7: Ganacias de los colegios con las habilidades de los estudiantes distribuidas $Beta(\alpha, \beta)$



Fuente: Basado en simulaciones del equilibrio del CSM para una distribución Beta de las habilidades de los estudiantes con parámetros $\alpha = 10$ y $\beta = 2$. Para simplificar, consideramos un modelo con $N=110$ y $M=10$.

Es fácil demostrar que los resultados anteriores no pueden ser generalizados trivialmente para cualquier distribución de probabilidad de las habilidades de los estudiantes. Como es mostrado en la siguiente figura, no podemos garantizar la monotonicidad de las ganancias de los colegios con respecto al número de estudiantes. En este caso, consideramos que las habilidades siguen una distribución Beta con parámetros $a = 10$ y $b = 2$.¹⁸ Notemos que la distribución utilizada para nuestro contraejemplo está sesgada a la derecha. Este hecho podría explicar por qué nuestro resultado acerca de las ganancias de los colegios no se sostiene en este contexto, debido a que con esta distribución la probabilidad de matricular a un buen estudiante es alta aun sin señalización costosa y con un número reducido de estudiantes.

¹⁸Una variable aleatoria X sigue una distribución **Beta distribution** con parámetros (α, β) para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, es decir $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, si $Range(X) = (0,1)$ y para $x \in (0, 1)$ la función de densidad satisface la expresión:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

Donde $\Gamma(x)$ es la función Gama.

7. Conclusiones

En este artículo analizamos el papel de la señalización costosa en un problema descentralizado de admisiones a la universidad con información incompleta. Consideramos un problema de emparejamiento en el que las universidades con calidad observable desean matricular a estudiantes cuyas habilidades son información privada. Analizamos un mecanismo de emparejamiento descentralizado simple llamado **Mecanismo de Señalización Costosa (CSM)**. Bajo el CSM, los estudiantes eligen una señal observable y costosa para indicar sus habilidades. En este contexto, caracterizamos un equilibrio simétrico agrupador sin señalización y un equilibrio simétrico estrictamente separador con señalización costosa. Bajo el equilibrio separador de este juego, se maximiza el número potencial de emparejamientos y los agentes son emparejados eficientemente, en el sentido de que los mejores estudiantes son aceptados en las mejores universidades.

Posteriormente, presentamos tres ejercicios de estática comparativa que permiten analizar el impacto de un cambio en los parámetros subyacentes del modelo sobre la estrategia de señalización de equilibrio. Nuestros principales resultados muestran que los efectos no son simétricos para los estudiantes, ya que dependen de sus habilidades. El primer ejercicio de estática comparativa se centra en el efecto de un cambio en el número de estudiantes. En este caso, demostramos que un aumento en la competencia hace que los estudiantes poco calificados disminuyan su inversión en señalización mientras que los estudiantes altamente calificados la aumentan. También mostramos que el efecto de un cambio en el número de vacantes escolares y un cambio en la calidad de las universidades tienen implicaciones similares.

Finalmente, analizamos las ganancias del CSM, que se definen de manera natural como la diferencia entre los pagos del equilibrio separador con señalización y el equilibrio agrupador sin señalización. Bajo esta definición, las ganancias de los estudiantes son estrictamente crecientes con respecto a sus habilidades, si bien pueden incurrir en pérdidas dependiendo de la distribución de sus habilidades. Dado que las ganancias de las universidades requieren el análisis de estadísticas de orden, consideramos el caso particular de habilidades distribui-

das exponencialmente, que nos permiten tener una solución cerrada para las ganancias de las universidades. El modelo exponencial tiene implicaciones muy interesantes. Primero, las ganancias de las universidades son crecientes en la calidad de la universidad. En segundo lugar, estas aumentan con el número de estudiantes, es decir, todas las universidades se benefician de una demanda creciente. Finalmente, mostramos que una demanda suficientemente grande por las vacantes escolares lleva a todas las universidades a obtener ganancias positivas.

Referencias

- [1] Alcalde, J., Pérez-Castrillo, D. and Romero-Medina, A. (1998), Hiring Procedures to Implement Stable Allocations, *Journal of Economic Theory* 82, 469-480.
- [2] Alcalde, J. (1996), Implementation of Stable Solutions to Marriage Problems, *Journal of Economic Theory* 69, 240-254.
- [3] Alcalde, J. and Romero-Medina, A. (2000), Simple Mechanisms to Implement the Core of College Admissions Problems, *Games and Economic Behavior* 31, 294-302.
- [4] Barut, Y. and Kovenock, D. (1998), The Symmetric Multiple Prize All-pay Auction with Complete Information, *European Journal of political Economy*, Vol. 14, pp. 627-644.
- [5] Bettinger, Eric and Baker, Rachel (2011), The Effects on Student Coaching in College: An Evaluation of a Randomized Experiment in Students Mentoring, NBER Working Paper No. 16881.
- [6] Casella, G. and Berger, R. (2002), *Statistical Inference*, Duxbury Press, 2nd edition, pp.660.
- [7] Coles, P., Cawley, J., Levine, P., Niederle, M., Roth, A. and Siegfried, J. (2010). The Job Market for New Economist: A Market Design Perspective, *Journal of Economic Perspectives* 24, 187-206.
- [8] Coles, P., Kushnir, A. and Niederle, M. (2010), Preference Signaling in Matching Markets, NBER Working Paper No. 16185.
- [9] Dearden, Li, Meyerhoefer and Yang (2017), Demonstrated Interest: Signaling Behavior in College Admissions, *Contemporary Economic Policy*, Vol. 35, No.4, pp. 630-657.
- [10] Frey, M. and Detterman (2004), Scholastic Assessment or g? The Relationship Between the Scholastic Assessment Test and General Cognitive Ability, *Psychological Science*, Volume 15, Number 6, pp. 373-378.

- [11] Dominguez, Ben and Briggs, Derek C. (2009), Using Linear Regression and Propensity Score Matching to Estimate the Effect of Coaching on the SAT, Working Paper, University of Colorado.
- [12] Griffith, A. and Rask, K. (2007), The Influence of the U.S. News and World Report Collegiate Rankings on the Matriculation Decision of High-Ability Students: 1995-2004, *Economics of Education Review*, Volume 26, Issue 2, pp. 244-255.
- [13] Hoppe, H., Moldovanu, B. and Sela, A. (2009), The Theory of Assortative Matching Based on Costly Signals, *Review of Economic Studies*, 76, pp. 253-281.
- [14] Huang, J.S. (1974), Characterizations of the Exponential Distribution by Order Statistics, *Journal of Applied Probability*, Vol. 11, No.3, pp. 605-608.
- [15] Gale, D. and Shapley, L. (1962), College Admission and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly* 69, 9-15.
- [16] Glazer, A. and Hassin, R. (1988), Optimal Contest, *Economic Inquiry*, 26, pp. 133-143.
- [17] Haeringer, G. and Wooders, M. (2011), Decentralized Job Matching, *International Journal of Game Theory* 40, 1-28.
- [18] Moldovanu, B., and A. Sela (2001) The Optimal Allocation of Prizes in Contests, *American Economic Review*, 91, 542-558.
- [19] Montgomery, Paul and Lilly, Jane (2012), Systematic Reviews of the Effects of Preparatory Courses on University Entrance Examinations in High School-age Students, *International Journal of Social Welfare*, Vol. 21, Issue 1, pp. 3-12.
- [20] Powers, Donald E. and Rock, Donald A. (1999), Effects of Coaching on SAT I: Reasoning Test Scores, *Journal of Educational Measurement*, Vol. 36, Issue, 2, pp. 93-118.
- [21] Romero-Medina, A. and Triossi, M. (2014), Non-revelation Mechanism in Many-to-one Markets, *Games and Economic Behavior*, Volume 87, pp. 624-630.

- [22] Roth, A. (2008), What Have We Learned from Market Design?, *The Economic Journal* 118, 285-310.
- [23] Roth, A. and Sotomayor, M. (1990), *Two Sided Matching: A Study in Game Theoretic Modeling and Analysis*, Cambridge University Press, 1-265.
- [24] Sotomayor, M. (2003), Reaching the Core of the Marriage Market Through a Non-revelation Matching Mechanism, *International Journal of Game Theory* 32, 241-251.
- [25] Triossi, M. (2009), Hiring Mechanism, Application Cost and Stability, *Games and Economic Behavior* 66, 566-575.
- [26] Wallace, B. (Sep 27, 2011), County SAT Scores Again Show Decline, *Lancaster Online*, <http://lancasteronline.com/article/local/468512_County-SAT-scores-again-show-decline.html#ixzz27Hr1Xc30>
- [27] Webster, T. (2001a), A Principal Component Analysis of the U.S. News and World Report Tier Rankings of Colleges and Universities, *Economics of Education Review* 20, 235-244.
- [28] Webster, T. (2001b), A Principal Component Analysis of the U.S. News and World Report Tier Rankings of National Liberal Arts Colleges, *Journal of Applied Business Research* 17, 39-54.

A. Apéndice

A.1. Apéndice A: El Equilibrio del Juego de Señalización

Demostración de la Proposición 1

Bajo las condiciones de la Proposición 1, es claro que la condición $E[\alpha | P'] > E[\alpha | P]$ se satisface para todo $\alpha \in (0, w)$ siempre que $P' > P$ donde $\int \alpha g(\alpha | P) d\alpha = E[\alpha | P]$. Por lo tanto, los estudiantes con los mayores niveles de sus señales son asociados con mayores habilidades académicas.

Los pagos de las universidades son iguales a las habilidades esperadas de los estudiantes matriculados, las cuales dependen del resultado de la ejecución del CSM (es decir, un emparejamiento entre colegios y estudiantes) y del perfil de señales de los estudiantes. De esta forma, dado un emparejamiento μ , un colegio $c \in C$ obtiene un pago esperado igual a $E[\alpha | P_{\mu(c)}]$. De manera similar, un estudiante $s \in S$ con parámetro α tiene un pago de $v_c - C(\alpha, P_s)$ si $\mu(s) = c$, o en otro caso obtiene $-C(\alpha, P_s)$.

Con el fin de simplificar, consideramos que después de observar el perfil de señales de los estudiantes $(P_s)_{s \in S}$, las universidades “actualizan” sus preferencias ordinales sobre el conjunto de estudiantes de la manera siguiente. Cada colegio $c \in C$ forma una relación de preferencias auxiliar \succ_c^* sobre el conjunto de estudiantes y la posibilidad de permanecer sin emparejarse, $S \cup \{c\}$ tal que (i) $s \succ_c^* c$ si y solo si $P_s > 0$ y (ii) para cualquier $s, s' \in S$, $s \succ_c^* s'$ si y solo si $P_s > P_{s'}$. Notemos que este perfil de preferencias provisionales $\succ_c^* = (\succ_c^*)_{c \in C}$ es consistente con las creencias $G(\alpha | P)$.

En la etapa de emparejamiento del CSM, el perfil de señales de los estudiantes está dado, por lo tanto los colegios forman unas preferencias provisionales $\succ_c^* = (\succ_c^*)_{c \in C}$, mientras que el costo de señalización es hundido para los estudiantes. Esto implica que las preferencias de los estudiantes en esta etapa están bien definidas y coinciden con el orden de preferencias estricto $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que las universidades tienen diferentes calidades, es decir, $v_1 > v_2 > \dots > v_M > 0$. También suponemos que las señales de los estudiantes satisfacen $P_s \neq P_{s'}$ para todo $s, s' \in S$. Este supuesto acerca de las seña-

les de los estudiantes no es restrictivo, dado que en equilibrio los empates entre estudiantes suceden con probabilidad igual a cero. Así, para cualquier perfil de señales de los estudiantes $(P_s)_{s \in S}$, existe un problema de admisiones a la universidad bien definido en la etapa de emparejamiento del CSM con preferencias estrictas, el cual es denotado por $(S, C, (>_S, >_C^*))$.

Notemos que el problema de emparejamiento $(S, C, (>_S, >_C^*))$ satisface las condiciones del teorema de Alcalde y Romero-Medina (1998) en la etapa de emparejamiento del CSM. Por lo tanto, sabemos que solo los emparejamiento estables entre los estudiantes y los colegios pueden ser resultados razonables en cualquier SPE del juego inducido por el CSM. Además, dado que los agentes de cada lado del mercado tienen las mismas preferencias, este problema tiene un único emparejamiento estable que es asortativo para cada perfil de señales de los estudiantes. Esto completa la demostración.

El problema de maximización de cualquier estudiante con parámetro α es:

$$\max_{P_1 \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^M v_k \binom{N-1}{k-1} F(\rho_N^{-1}(P_1))^{N-k} [1 - F(\rho_N^{-1}(P_1))]^{k-1} - \frac{c(P_1)}{\phi(\alpha)} \right\} \quad (26)$$

Al definir la función $\varphi(x, N, k) = F(x)^{N-k} [1 - F(x)]^{k-1}$, para cada $k \in \{2, \dots, N-1\}$ tenemos que:

$$\varphi'(x, N, k) = [(N-k)(1 - F(x)) - (k-1)F(x)] F(x)^{N-1-k} [1 - F(x)]^{k-2} f(x) \quad (27)$$

Por lo tanto, la CPO de la función de pagos $\pi(\alpha, P_1)$ con respecto a P_1 está dada por:

$$\begin{aligned} & v_1 (N-1) F(\rho_N^{-1}(P_1))^{N-2} \frac{f(\rho_N^{-1}(P_1))}{\rho'_N(\rho_N^{-1}(P_1))} + \\ & + \sum_{k=2}^M v_k (N-k) \binom{N-1}{k-1} F(\rho_N^{-1}(P_1))^{N-1-k} [1 - F(\rho_N^{-1}(P_1))]^{k-1} \frac{f(\rho_N^{-1}(P_1))}{\rho'_N(\rho_N^{-1}(P_1))} - \\ & - \sum_{k=2}^M v_k (k-1) \binom{N-1}{k-1} F(\rho_N^{-1}(P_1))^{N-k} [1 - F(\rho_N^{-1}(P_1))]^{k-2} \frac{f(\rho_N^{-1}(P_1))}{\rho'_N(\rho_N^{-1}(P_1))} - \\ & - \frac{c'(P_1)}{\phi(\alpha)} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

En un equilibrio simétrico $P_1 = \rho_M(\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned}
& v_1 (N-1) \phi(\alpha) F(\alpha)^{N-2} f(\alpha) + \\
& + \sum_{k=2}^M v_k (N-k) \binom{N-1}{k-1} \phi(\alpha) F(\alpha)^{N-1-k} [1-F(\alpha)]^{k-1} f(\alpha) - \\
& - \sum_{k=2}^M v_k (k-1) \binom{N-1}{k-1} \phi(\alpha) F(\alpha)^{N-k} [1-F(\alpha)]^{k-2} f(\alpha) = \\
& = c'(\rho_N(\alpha)) \rho'_N(\alpha)
\end{aligned} \tag{29}$$

Al reordenar y resolver la anterior ecuación diferencial con la condición inicial $\rho_M(0) = 0$, encontramos que la estrategia de señalización $\rho_M(\alpha)$ satisface,

$$\begin{aligned}
& \rho_M(\alpha) = \\
& = c^{-1} \left(\begin{aligned} & (N-1) \sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \binom{N-2}{k-1} \int_0^\alpha \phi(x) F(x)^{N-1-k} [1-F(x)]^{k-1} f(x) dx + \dots \\ & \dots + (N-1) v_M \binom{N-2}{M-1} \int_0^\alpha \phi(x) F(x)^{N-M-1} [1-F(x)]^{M-1} f(x) dx \end{aligned} \right) \tag{30}
\end{aligned}$$

Esta estrategia caracteriza la solución del problema de maximización de cualquier estudiante con parámetro α . Notemos que $(N-1) \binom{N-2}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-1-k)!}$, de tal forma que podemos re-escribir esta estrategia de señalización como:

$$\begin{aligned}
& \rho_M(\alpha) = \\
& = c^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \int_0^\alpha \phi(x) f_{(k,N-1)}(x) dx + v_M \int_0^\alpha \phi(x) f_{(M,N-1)}(x) dx \right) \tag{31}
\end{aligned}$$

Donde $f_{(k,N-1)}(x) = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-1-k)!} F(x)^{N-1-k} [1-F(x)]^{k-1} f(x)$ para $k = 1, \dots, M$, donde $f_{(k,N-1)}(x)$ es la función de densidad de la x -ésima mayor estadística de orden de una muestra independiente e idénticamente distribuida de tamaño $N-1$.

Demostración de la Proposición 2

Consideremos que un estudiante con parámetro α está planeando desviarse de la estrategia de señalización $\rho_M(\alpha)$, escogiendo una señal alternativa P' . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 \leq P' < \rho_M(\alpha)$, dado que la estrategia de señalización es estrictamente

creciente en α , existe una única $0 \leq \alpha' < \alpha$ tal que $P' = \rho_M(\alpha')$. Entonces, escogiendo una señal P' , el estudiante obtiene un pago esperado $\pi(\alpha, P') = \pi(\alpha, \rho_M(\alpha'))$ dado por

$$\pi(\alpha, \rho_M(\alpha')) = \sum_{k=1}^M v_k \binom{N-1}{k-1} F(\alpha')^{N-k} [1 - F(\alpha')]^{k-1} - \frac{c(\rho_M(\alpha'))}{\phi(\alpha)} \quad (32)$$

Al desviarse a P' , el estudiante pierde un pago extra de

$$\begin{aligned} & \pi(\alpha, \rho_M(\alpha)) - \pi(\alpha, \rho_M(\alpha')) = \\ & = \sum_{k=1}^M v_k \binom{N-1}{k-1} \left(F(\alpha)^{N-k} [1 - F(\alpha)]^{k-1} - F(\alpha')^{N-k} [1 - F(\alpha')]^{k-1} \right) - \\ & \quad - \frac{1}{\phi(\alpha)} (c(\rho_M(\alpha)) - c(\rho_M(\alpha'))) \end{aligned} \quad (33)$$

El incremento en el costo de señalización $c(\rho_M(\alpha)) - c(\rho_M(\alpha'))$ es positivo e igual a

$$\begin{aligned} & c(\rho_M(\alpha)) - c(\rho_M(\alpha')) = \\ & = \sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \int_{\alpha'}^{\alpha} \phi(x) f_{(k, N-1)}(x) dx + v_M \int_{\alpha'}^{\alpha} \phi(x) f_{(M, N-1)}(x) dx \end{aligned} \quad (34)$$

Dado que $\phi(x)$ es estrictamente creciente y positiva en x , es claro que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\phi(\alpha)} (c(\rho_M(\alpha)) - c(\rho_M(\alpha'))) < \\ & < \sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \int_{\alpha'}^{\alpha} f_{(k, N-1)}(x) dx + v_M \int_{\alpha'}^{\alpha} f_{(M, N-1)}(x) dx \end{aligned} \quad (35)$$

Reordenando la ecuación anterior, encontramos que la siguiente condición se sostiene,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\phi(\alpha)} (c(\rho_M(\alpha)) - c(\rho_M(\alpha'))) < \\ & < (N-1) v_1 \int_0^{\alpha} F(x)^{N-2} f(x) dx + \sum_{k=2}^M v_k \binom{N-1}{k-1} \int_0^{\alpha} \varphi'(x, N, k) dx \end{aligned} \quad (36)$$

Entonces para $k \in \{2, \dots, N-1\}$, tenemos que:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha} \varphi'(x, N, k) dx = F(\alpha)^{N-k} [1 - F(\alpha)]^{k-1} - F(\alpha')^{N-k} [1 - F(\alpha')]^{k-1} \quad (37)$$

Lo que implica que $\pi(\alpha, \rho_M(\alpha)) - \pi(\alpha, \rho_M(\alpha')) > 0$. Utilizando un argumento similar, es posible mostrar que cualquier desviación $P' > \rho_N(\cdot)$ no puede ser una desviación redituable. Esto completa la demostración.

Demostración de la Proposición 3

- $\rho_M(\alpha)$ es estrictamente creciente en α y acotada superiormente.

Para probar que la estrategia de señalización $\rho_M(\alpha)$ es estrictamente creciente en α , es suficiente con mostrar que la función $c(\rho_M(\alpha))$ es estrictamente creciente en α , dado que $c(\cdot)$ es una función estrictamente creciente. Entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} (c(\rho_M(\alpha))) = \\ & = (N-1) \sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \binom{N-2}{k-1} \phi(\alpha) F(\alpha)^{N-1-k} [1 - F(\alpha)]^{k-1} f(\alpha) + \dots \\ & \quad \dots + (N-1) v_M \binom{N-2}{M-1} \phi(\alpha) F(\alpha)^{N-M-1} [1 - F(\alpha)]^{M-1} f(\alpha) \end{aligned} \quad (38)$$

Es claro que $\frac{d}{d\alpha} (c(\rho_M(\alpha))) > 0$ para todo α , como buscábamos. Para demostrar que la estrategia de equilibrio $\rho_M(\alpha)$ es acotada superiormente, consideramos que esta función se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & c(\rho_M(\alpha)) = \\ & = \sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \int_0^\alpha \phi(x) f_{(k,N-1)}(x) dx + v_M \int_0^\alpha \phi(x) f_{(M,N-1)}(x) dx \end{aligned} \quad (39)$$

donde $f_{(k,N-1)}(x)$ es la función de densidad de la k -ésima estadística de orden de una muestra de tamaño $N-1$ de la distribución $F(x)$, tal que $x_{(1,N-1)} = \max_{1 \leq i \leq N-1} \{x_i\}$, $x_{(2,N-1)}$ = segundo mayor en $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$ y, así sucesivamente. Debido a que $\phi(x)$ es estrictamente creciente y acotada superiormente en $[0, w]$, sabemos que:

$$c(\rho_M(\alpha)) \leq \phi(w) \left(\sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) \int_0^w f_{(k,N-1)}(x) dx + v_M \int_0^w f_{(M,N-1)}(x) dx \right) \quad (40)$$

Además por definición $\int_0^w f_{(k,N-1)}(x) dx = 1$ para todo $k = 1, \dots, M$. Entonces,

$$c(\rho_M(\alpha)) \leq \phi(w) \left(\sum_{k=1}^{M-1} (v_k - v_{k+1}) + v_M \right) < \infty \quad (41)$$

- $\pi(\alpha, \rho_M(\alpha))$ es estrictamente creciente en α .

Ahora queremos mostrar que el pago de equilibrio $\pi(\alpha, \rho_M(\alpha))$ es estrictamente creciente en α . Para demostrar esta propiedad, calculamos la derivada de la función de pagos con respecto a α ,

$$\frac{d}{d\alpha} (\pi(\alpha, \rho_M(\alpha))) = \begin{cases} (N-1)v_1 F(\alpha)^{N-2} f(\alpha) + \sum_{k=2}^M v_k \binom{N-1}{k-1} \phi'(\alpha) - \\ -\frac{1}{\phi(\alpha)^2} \left(\phi(\alpha) \frac{d}{d\alpha} (c(\rho_M(\alpha))) - c(\rho_M(\alpha)) \phi'(\alpha) \right) \end{cases} \quad (42)$$

Al reordenar la expresión anterior, es fácil mostrar que,

$$\frac{d}{d\alpha} (\pi(\alpha, \rho_M(\alpha))) = \frac{c(\rho_M(\alpha)) \phi'(\alpha)}{\phi(\alpha)^2} > 0 \quad (43)$$

Esto completa la demostración.

A.2. Apéndice B: Estática Comparativa

Demostración de la Proposición 4

Consideremos la estrategia de señalización de equilibrio de cualquier problema de admisiones a la universidad con $M \geq 1$ vacantes y $N > M$ estudiantes.

$$\begin{aligned} \rho_M(\alpha, N) &= \\ &= c^{-1} \left((N-1)v_1 \binom{N-2}{M-1} \int_0^\alpha \phi(x) F(x)^{N-1-M} [1-F(x)]^{M-1} f(x) dx \right) \end{aligned} \quad (44)$$

Dado que la función de costos $c(\cdot)$ es estrictamente creciente, es suficiente mostrar que la función $c(\rho_M(\alpha, N))$ satisface las propiedades buscadas. La diferencia $c(\rho_M(\alpha, N+1)) - c(\rho_M(\alpha, N))$ es igual a,

$$\begin{aligned} & v_1 \int_0^\alpha \left(N \binom{N-1}{M-1} F(x) - (N-1) \binom{N-2}{M-1} \right) \times \\ & \times \phi(x) F(x)^{N-1-M} [1-F(x)]^{M-1} f(x) dx \end{aligned} \quad (45)$$

Entonces, es claro que $c(\rho_M(\alpha, N+1)) - c(\rho_M(\alpha, N)) < (>)0$ si $\alpha < (>)\alpha_N(N)$, donde $\alpha_N(N)$ es la única solución de la ecuación,

$$F(x) = 1 - \frac{M}{N} \quad (46)$$

Además, el umbral $\alpha_N(N)$ es estrictamente creciente en N , es decir, $\alpha_N(N+1) > \alpha_N(N)$ para todo $N > M$. Esto completa la demostración.

Demostración de la Proposición 5

Consideremos la estrategia de señalización de equilibrio de cualquier problema de admisiones a la universidad con $M \geq 1$ vacantes y $N > M$ estudiantes.

$$\begin{aligned} & \rho_M(\alpha, M) = \\ & = c^{-1} \left((N-1) v_1 \binom{N-2}{M-1} \int_0^\alpha \phi(x) F(x)^{N-1-M} [1-F(x)]^{M-1} f(x) dx \right) \end{aligned} \quad (47)$$

Dado que la función $c(\cdot)$ es estrictamente creciente, para demostrar el resultado, nos enfocaremos en la función $c(\rho_M(\alpha, M))$. La diferencia $c(\rho_M(\alpha, M+1)) - c(\rho_M(\alpha, M))$ es igual a,

$$\begin{aligned} & v_1 (N-1) \int_0^\alpha \left(\binom{N-2}{M} (1-F(x)) - \binom{N-2}{M-1} F(x) \right) \times \\ & \times \phi(x) F(x)^{N-2-M} [1-F(x)]^{M-1} f(x) dx \end{aligned} \quad (48)$$

Reordenando y aplicando la identidad $\binom{N}{k} = \binom{N-1}{k-1} + \binom{N-1}{k}$, la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} & v_1 (N-1) \int_0^\alpha \left(\binom{N-2}{M} - \binom{N-1}{M} F(x) \right) \times \\ & \times \phi(x) F(x)^{N-2-M} [1-F(x)]^{M-1} f(x) dx \end{aligned} \quad (49)$$

Dado que $\binom{N-1}{M} = \frac{N-1}{N-1-M} \binom{N-2}{M}$, sabemos que:

$$v_1 (N - 1) \binom{N-2}{M} \int_0^\alpha \left(1 - \frac{N-1}{N-1-M} F(x)\right) \times \\ \times \phi(x) F(x)^{N-2-M} [1 - F(x)]^{M-1} f(x) dx \quad (50)$$

Por lo tanto, es claro que $c(\rho_M(\alpha, M+1)) - c(\rho_M(\alpha, M)) > 0$ si $\alpha \leq \alpha_N(M, N)$, donde $\alpha_M(M, N)$ es la única solución de la ecuación,

$$F(x) = 1 - \frac{N-1-M}{N-1} \quad (51)$$

Además, el umbral $\alpha_M(M, N)$ es estrictamente creciente en N y es estrictamente decreciente en M . Esto completa la demostración.

Demostración de la Proposición 6

Analizamos el efecto de un cambio en la calidad del colegio c_k , considerando que la estrategia de señalización de equilibrio depende de la calidad de este colegio, es decir, $\rho_M(\alpha, v_k)$. Sabemos que la estrategia de señalización de equilibrio satisface la ecuación,

$$c(\rho_M(\alpha, v_k)) = \sum_{k=1}^M v_k \binom{N-1}{k-1} \int_0^\alpha \phi(x) \varphi'(x, N, k) dx \quad (52)$$

Consideramos un cambio en la calidad del colegio c_k tal que $v_{k-1} > v'_k > v_{k+1}$, es decir, este cambio preserva las preferencias ordinales de los estudiantes. Por lo tanto, la diferencia $c(\rho_M(\alpha, v'_k)) - c(\rho_M(\alpha, v_k))$ satisface la siguiente ecuación para $k = 1, \dots, M$.

$$c(\rho_M(\alpha, v'_k)) - c(\rho_M(\alpha, v_k)) = (v'_k - v_k) \binom{N-1}{k-1} \int_0^\alpha \phi(x) \varphi'(x, N, k) dx \quad (53)$$

Dado que $\varphi'(x, N, k) = [(N-k)(1-F(x)) - (k-1)F(x)] F(x)^{N-1-k} [1-F(x)]^{k-2} f(x)$, es fácil mostrar que siempre que $\alpha \leq \alpha_{v_k}(N, k)$ se satisface

$$\text{sgn}(c(\rho_M(\alpha, v'_k)) - c(\rho_M(\alpha, v_k))) = \text{sgn}(v'_k - v_k) \quad (54)$$

Donde $\alpha_{v_k}(N, k)$ es la única solución de la ecuación,

$$F(x) = \frac{N-k}{N-1} \quad (55)$$

Además, el umbral $\alpha_{v_k}(N, k)$ es estrictamente creciente en N para todo $k = 2, \dots, M$ y es estrictamente decreciente en k . Esto completa la demostración.

A.3. Apéndice C: Ganancias del CSM

Si α se distribuye exponencialmente, es decir, $f(\alpha; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$ para $\alpha \in [0, \infty)$ y $\theta > 0$, entonces:

1. $E[\alpha] = \theta$; y
2. $E[\alpha_{(j)}] = \sum_{k=1}^{N+1-j} \frac{\theta}{N+1-k}$ para $j = 1, \dots, N$.

donde $\alpha_{(1)} = \max_{1 \leq i \leq N} \alpha_i$, $\alpha_{(2)}$ = segundo mayor en $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N-1}$ y así sucesivamente (Huang, 1974). Consideremos cualquier M por N problema de admisiones a la universidad tal que $N > M \geq 1$, entonces las ganancias de los colegios satisfacen la expresión:

$$\Delta EQ(j, N) = \theta \sum_{k=1}^{N+1-j} \frac{1}{N+1-k} - \theta \left(\frac{N-1}{N} \right)^{j-1} \quad (56)$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\theta = 1$. Entonces podemos establecer el siguiente resultado auxiliar.

Observación 1 La función continua $f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^{j-1}$ es estrictamente creciente y cóncava en x siempre que $x > j \geq 3$.

Demostración. Para demostrar este resultado, simplemente tomamos la primera y segunda derivada de la función $f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^{j-1}$ y obtenemos que:

1. $f'(x) = \left(\frac{j-1}{x^2} \right) \left(\frac{x-1}{x} \right)^{j-2} > 0$; y
2. $f''(x) = \left(\frac{j-1}{x^4} \right) \left(\frac{x-1}{x} \right)^{j-3} (j-2x) < 0$.

Siempre que $x > j \geq 3$. Esto completa la demostración. ■

Lema 1 $\Delta EQ(j, N) > \Delta EQ(j + 1, N)$ para todo $j = 1, \dots, M - 1$.

Demostración. La diferencia $\Delta EQ(j, N) - \Delta EQ(j + 1, N)$ satisface:

$$\Delta EQ(j, N) - \Delta EQ(j + 1, N) = \frac{1}{j} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \left(\frac{1}{N}\right) \quad (57)$$

Dado que $\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \leq 1$ para todo $j \geq 1$, sabemos que:

$$\Delta EQ(j, N) - \Delta EQ(j + 1, N) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{N} = \frac{N-j}{jN} \quad (58)$$

Asimismo, para $N > M \geq j$, $\Delta EQ(j, N) - \Delta EQ(j + 1, N) > 0$ para $j = 1, \dots, M - 1$. Esto completa la demostración. ■

Lema 2 $\Delta EQ(j, N)$ es estrictamente creciente en $N > M$ para todo $j = 1, \dots, M$.

Demostración. Consideremos la siguiente función para un $j = 1, \dots, M$ dado,

$$\Delta EQ(j, N + 1) - \Delta EQ(j, N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N+2-j} \frac{1}{N+2-k} - \sum_{k=1}^{N+1-j} \frac{1}{N+1-k} \\ - \left[\left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-1} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \right] \end{cases} \quad (59)$$

Al simplificar, obtenemos la expresión,

$$\Delta EQ(j, N + 1) - \Delta EQ(j, N) = \frac{1}{N+1} - \left(\left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-1} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \right) \quad (60)$$

Una observación directa muestra que $\Delta EQ(j, N + 1) - \Delta EQ(j, N) > 0$ para $j = 1, 2$. Ahora consideremos el caso de cualquier j tal que $N > M \geq j \geq 3$. Por la Observación 1, sabemos que:

$$f'(N) \geq \left(\frac{N}{N+1}\right)^{j-1} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \quad (61)$$

donde $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{j-1}$ tal que $x > j \geq 3$. Entonces,

$$\Delta EQ(j, N+1) - \Delta EQ(j, N) \geq \frac{1}{N+1} - \left(\frac{j-1}{N^2}\right) \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-2} \quad (62)$$

Debido a que $\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-2} \leq 1$ para todo $j \geq 2$, sabemos que:

$$\Delta EQ(j, N+1) - \Delta EQ(j, N) \geq \frac{1}{N+1} - \frac{j-1}{N^2} = \frac{N^2 - (j-1)(N+1)}{N^2(N+1)} \quad (63)$$

Además, dado que $N > M \geq j \geq 3$ y $(N-1)(N+1) > (j-1)(N+1)$, podemos concluir que,

$$\Delta EQ(j, N+1) - \Delta EQ(j, N) > \frac{1}{N^2(N+1)} \quad (64)$$

Por lo tanto, $\Delta EQ(j, N+1) - \Delta EQ(j, N) > 0$ para todo $N > M \geq j \geq 3$. Esto completa la demostración. ■

Demostración de la Proposición 7

Las propiedades 1 y 2 de las ganancias de los colegios $\Delta EQ(j, N)$ vienen directamente de los Lemas 1 y 2. Para la tercera propiedad supongamos que $\Delta EQ(M, N) \geq 0$ para $N = M+1$, entonces $N^* = M+1$. Por el Lema 2 sabemos que $\Delta EQ(M, N) \geq 0$ para todo $N \geq N^* > M$. Por el Lema 1 sabemos que $\Delta EQ(j, N) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, M$, siempre que $\Delta EQ(M, N) \geq 0$. Entonces, $\Delta EQ(j, N) \geq 0$ para todo $N \geq N^*$ y $j = 1, \dots, M$.

Ahora supongamos que $\Delta EQ(M, N) < 0$ for $N = M+1$. Notemos que

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{M-1} = 1$ para todo $M \geq 1$; y
2. $\lim_{N \rightarrow \infty} E[\alpha_{(M)}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N+1-M} \frac{1}{N+1-k} = \infty$.

Entonces, debe existir un $N^* > M$ tal que $\Delta EQ(M, N^*) \geq 0$. Por lo tanto, por los Lemas 1 y 2 sabemos que, $\Delta EQ(j, N) \geq 0$ para todo $N \geq N^*$ y $j = 1, \dots, M$. Esto completa la demostración.