



BANCO
DE
MEXICO

Implantación del Modelo CyRCE:

**Simplificaciones por estructura y estimación de
parámetros.**

Fernando Avila Embríz
Javier Márquez Diez-Canedo
Alberto Romero Aranda

Abril-2002



Implantación del Modelo CyRCE:

Simplificaciones por estructura y estimación de parámetros.

Fernando Avila Embríz
Javier Márquez Diez-Canedo
Alberto Romero Aranda

I. Introducción.

En el documento de investigación 2002-04 del Banco de México¹, se describe un modelo de riesgo crédito que es más apropiado para mercados emergentes que los diseñados en países con mercados desarrollados por varias razones. En primer término, al suponer que la distribución de pérdidas por incumplimiento de deudores se puede caracterizar por su media y su varianza, se obtienen expresiones cerradas para el valor en riesgo (VaR) de una cartera de créditos, sin tener que recurrir a técnicas numéricas altamente onerosas en el consumo de recursos de cómputo y tiempo. Una propiedad interesante del modelo es que se obtiene una medida de la concentración que permite evaluar el impacto de ésta en el riesgo crédito de la cartera y que está asociada a los límites individuales que deben respetar los créditos, ya sea por razones regulatorias o por decisiones de gestión propias de cada banco. Al tener expresiones cerradas para la medida de riesgo, se pueden obtener relaciones de suficiencia de capital, y de límites para créditos individuales en donde la relación entre estos parámetros de gestión y el riesgo crédito es explícita. Otra virtud es que el modelo permite una segmentación de la cartera de créditos totalmente arbitraria, con lo cual se facilita la detección de los segmentos más riesgosos, la determinación de límites individuales a los créditos diferenciados por segmento, así como la asignación de capital requerida para que cada segmento de la cartera esté adecuadamente capitalizado. Finalmente, como todos los elementos que contribuyen al riesgo están parametrizados, y por lo tanto se pueden determinar exógenamente, las deficiencias de información que son típicas de nuestros mercados, se pueden subsanar haciendo supuestos sobre los valores de estos. La eficiencia de cálculo que permite el modelo, hace que el análisis de sensibilidad, o las pruebas de estrés sobre los parámetros inciertos, sean ejercicios fáciles de realizar y enriquecer el análisis de riesgo, aún en ausencia de estimaciones estadísticamente válidas de los parámetros del modelo.

Con todas sus virtudes, el modelo original en su versión más general presenta una serie de problemas técnicos que dejan algunos cabos sueltos, y exigen un esfuerzo de cálculo que crece exponencialmente a medida que aumenta el número de créditos en la cartera. En particular, el cambio de variable propuesto para manejar el efecto de covariación entre incumplimientos de los créditos de la cartera, conduce a la necesidad de factorizar la matriz de varianza-covarianza “**M**” a través de una matriz “**S**” tal que $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$, lo cual implica darle respuesta a varios problemas técnicamente complejos. En primer lugar, como la

¹ Véase Márquez, Abril del 2002.

matriz “**S**” no es única ¿Cuál se escoge? Hasta el momento no se ha podido determinar categóricamente si cualquier representación de “**S**” es igual de buena o si una de ellas es mejor que las demás. Pero además, por las dificultades de estimación de las covarianzas, normalmente la primera aproximación de **M** resulta con frecuencia en una matriz que no es positiva definida, sin lo cual es imposible hacer la factorización requerida. Esto implica que se requiere un proceso numérico adicional de ajuste en las estimaciones de las covarianzas, llamado “acondicionamiento”, para hacer que la matriz resultante sea positiva definida, con lo cual muchas de las estimaciones originales cambian significativamente. Finalmente, como ya se mencionó, aunque todo esté bien condicionado y no haya impedimento teórico alguno, la obtención de la matriz **S** requiere realizar un procedimiento numérico en donde el número de operaciones crece geométricamente con el tamaño “**N**” de la matriz **M**.

En este trabajo se replantea el modelo original general en términos más sencillos utilizando el *cociente de Rayleigh* como la medida que resume el efecto de variación-covariación en el riesgo de crédito, manteniendo todas las propiedades deseables del modelo y haciendo innecesario el proceso de factorización de la matriz de covarianzas con todos los problemas que esto significa. La nueva versión del modelo también arroja un nuevo resultado teórico importante, ya que permite obtener una *medida de concentración de riesgo*, que indica como la correlación entre incumplimientos afecta la concentración por número de créditos y por lo tanto el riesgo de crédito de la cartera.

Normalmente en la implementación de cualquier modelo de riesgo de crédito, se supone que los créditos se pueden agrupar de manera que todos los créditos dentro de un grupo tienen características comunes, y los parámetros o elementos que determinan las pérdidas potenciales que pueden ocasionar los créditos del grupo son iguales para todos sus miembros. Por ejemplo, en **CreditMetrics**TM los créditos se agrupan por su calificación, con lo cual todos los créditos con la misma calificación tienen la misma probabilidad de migrar a los diferentes estados de calidad (calificación) y la misma probabilidad de incumplimiento. En **CreditRisk**⁺, todos los créditos con la misma calificación y que dependen de la misma manera de los factores de riesgo que las determinan, tienen la misma probabilidad de incumplimiento. Además, en este último paradigma, los créditos se agrupan en “cubetas” de igual número de “unidades de pérdida”; es decir: Se supone que la pérdida que genera el incumplimiento de un deudor es la misma para todos los deudores que están en la misma cubeta. En **CyRCE**, el resultado de segmentar la cartera es que se supone que las probabilidades de incumplimiento son iguales para todos los créditos de un segmento, así como la correlación entre ellos. Pero además, la correlación de incumplimiento entre los créditos de un segmento y los de otro, también es la misma. Como se verá en este trabajo, esto conduce a una estructura en la cual las operaciones matriciales que requiere el modelo se hacen algebraicamente, obteniendo expresiones que resultan en ahorros considerables de memoria, programación y cálculo.

Finalmente, se proporcionan técnicas de estimación de los parámetros principales; a saber: Probabilidades de incumplimiento y correlaciones. Dado que la información disponible presenta serias deficiencias en lo que se refiere a la calificación de los créditos por parte de los bancos, el procedimiento empleado se diseñó para trabajar directamente con datos disponibles de incumplimiento de deudores dentro de segmentos específicos de una cartera de créditos. En este sentido, la metodología adoptada sería más parecida conceptualmente

en todo caso, a la que utiliza **KMV**. A nuestro juicio, esto es incluso mejor que contar con calificaciones ya que a fin de cuentas todos los esquemas de calificación pretenden ser indicativos de probabilidades de incumplimiento, pero en nuestro entorno y salvo algunas excepciones, rara vez lo logran. Es notorio que ante su evidente incapacidad para predecir crisis y quiebras de empresas públicas importantes, las propias calificadoras, que desde hace más de una década han estado calculando probabilidades de migración e incumplimiento asociadas a sus respectivos sistemas de calificación, están conscientes de las limitaciones de estos como vehículos para la estimación de probabilidades de incumplimiento. En fechas recientes Moody's adquirió **KMV** y se anticipa un cambio metodológico dramático en donde su nuevo sistema de calificaciones se basará en estimaciones de probabilidades de impago y no al revés como lo venía haciendo tradicionalmente. Asimismo, Standard & Poors acaba de anunciar la contratación de un nuevo equipo de conocidos especialistas en la materia que también se espera resultará en un cambio metodológico en su manera de calificar deudores.

Así, las técnicas de estimación que se presentan en este trabajo, parten de que para cada segmento de la cartera, se conoce el número de deudores que, estando al corriente en sus pagos en el periodo anterior, incumplen en el siguiente periodo. La relación entre el número de deudores que incumplen respecto al número total de deudores al corriente en el periodo anterior, es lo que se conoce como *la tasa de incumplimiento* de deudores dentro de los segmentos en que se divide la cartera de créditos. Con esta información, se pueden hacer estimaciones de probabilidades de incumplimiento y correlaciones. En este trabajo presentamos varios métodos de estimación y se discuten sus problemas y sus virtudes. En los métodos de estimación presentados, se especifican requisitos para la estimación de parámetros necesarios para evitar problemas de un mal condicionamiento de la matriz de covarianzas.

II. Un replanteamiento del modelo general utilizando el cociente de Rayleigh.

Supóngase que la distribución de pérdidas de una cartera de créditos se puede caracterizar por su media y su varianza y que el vector de probabilidades de incumplimiento es “**p**” con matriz de covarianzas entre incumplimientos “**M**” que se obtienen exógenas al modelo. Procediendo según el análisis original, la desigualdad de VaR respecto a capital es:

$$VAR_a = \mathbf{p}^T \mathbf{F} + z_a \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} \leq K \quad (2.1)$$

En el modelo original, se hacía notar que como **M** es positiva definida, existe una matriz “**Q**” tal que,

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \quad (2.2)$$

donde **Λ** es la matriz diagonal de valores característicos de **M**, y **Q** es una matriz ortogonal de *eigen-vectores* de **M**, con la propiedad de que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.² Sea $\mathbf{S} = \mathbf{Q} \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{Q}^T$, donde $\sqrt{\mathbf{\Lambda}}$

² Se puede consultar cualquier texto intermedio de algebra lineal; por ejemplo Strang G. 1980, o Mirsky L. 1990.

es la matriz diagonal con las raíces cuadradas de los eigen-valores de \mathbf{M} , de manera que $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$. Haciendo el cambio de variable $\mathbf{G} = \mathbf{S}\mathbf{F}$ se tiene que $\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F} = \mathbf{G}^T \mathbf{G}$. La importancia principal de esta observación es que el cambio de variable evidencia un redimensionamiento del vector original de créditos a través de la raíz cuadrada de la matriz de covarianzas “ \mathbf{S} ”. Este redimensionamiento hace que los créditos con mayores covarianzas de incumplimiento con los demás créditos de la cartera crezcan respecto a su valor original, mientras que sucede lo contrario con los de menor covariación. Esto a su vez significa que aunque mucho crédito en manos de pocos deudores puede ser riesgoso, es todavía más riesgoso que haya mucho riesgo concentrado en un cierto grupo de créditos, sin importar que se trate de muchos o pocos créditos. Esto a su vez significa que en un momento dado, una cartera muy diversificada de créditos pequeños, donde los créditos individuales tienen altas probabilidades de incumplimiento y están muy correlacionados entre sí, puede representar más riesgo que una cartera de pocos créditos grandes con probabilidades de incumplimiento bajas e independientes entre sí. Esta discusión se retoma y formaliza en la sección siguiente.

A diferencia del modelo original que sigue esta línea de razonamiento y la lleva a sus últimas consecuencias, aquí se toma otro camino. Así, multiplicando y dividiendo $\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}$ por $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$, y dividiendo entre $V = \mathbf{1}^T \mathbf{F}$, se obtiene la siguiente relación de suficiencia de capital:

$$\mathbf{y} \geq \bar{p} + z_a \sqrt{\frac{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}} H(F) = \bar{p} + z_a \mathbf{s} \sqrt{H(F)} \quad (2.3)$$

donde

$$\mathbf{s}^2 = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} = R(F, M) = \text{Cociente de Rayleigh} \quad (2.4)$$

es una medida de la varianza de las pérdidas y

$$\bar{p} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{F}}{V} \quad (2.5)$$

representa la pérdida esperada, relativa al valor total de la cartera. Procediendo de acuerdo al artículo original y aplicando el teorema 5.1, que dice que $f_k \leq q$ implica $H(F) \leq q$ se obtiene la cota para límites individuales a los créditos según:

$$H(F) \leq q \leq \left(\frac{y - \bar{p}}{z_a s} \right)^2 \quad (2.6)$$

Las relaciones (2.3) y (2.6) tienen básicamente la misma estructura que las del modelo original solo que ahora, la varianza de las pérdidas está compuesta por el índice de concentración $H(F)$ y el cociente de Rayleigh; es decir: $s \sqrt{H(F)}$. En realidad, los resultados para valor en riesgo y límites individuales que produce esta representación del modelo son idénticos a los que se obtienen del modelo original pero, como no involucra el cambio de variable, el cálculo se simplifica considerablemente. En la sección que sigue se investiga la implicación de esto en la obtención de una medida de concentración de riesgo.

2.2. Una medida de concentración de riesgo.

Para evidenciar la forma en que la correlación afecta la concentración y aumenta el riesgo, considérese el caso particular en que todos los créditos tienen la misma probabilidad de incumplimiento “ p ” y están idénticamente correlacionados a pares mediante el coeficiente de correlación “ r ”. La covarianza de incumplimientos entre cualquier par de créditos (i,j) es:

$$s_{ij} = s_i s_j r_{ij} = \sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_j(1-p_j)} r_{ij} = p(1-p)r \quad \forall i, j \quad (2.7)$$

Esto significa que la matriz de covarianzas tiene la estructura siguiente:

$$\mathbf{M} = p \cdot (1-p) \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Esto equivale a la siguiente representación matricial:

$$\mathbf{M} = p(1-p) \{ \mathbf{r} \mathbf{1} \mathbf{1}^T + (1-r) \mathbf{I} \} \quad (2.9)$$

Con esto se puede calcular la varianza de las pérdidas de la cartera haciendo la multiplicación matricial siguiente:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F} = p(1-p) \{ \mathbf{r} (\mathbf{1}^T \mathbf{F})^2 + (1-r) \mathbf{F}^T \mathbf{F} \}$$

Con esto la expresión de valor en riesgo queda como sigue:

$$VaR = V \left\{ p + z_a \sqrt{p \cdot (1-p)} \sqrt{\mathbf{r} + (1-\mathbf{r})H(F)} \right\} \quad (2.10)$$

En esta expresión, la varianza de pérdidas tiene dos componentes. El primero es la varianza Bernoulli $p(1-p)$, mientras que la componente que refleja el efecto de concentración es:

$$H' = \mathbf{r} + (1-\mathbf{r})H(F) \quad (2.11)$$

Si la correlación es positiva, H' es una combinación convexa entre el índice de Herfindahl de una cartera totalmente concentrada ($H(\cdot) = 1$) y el de la cartera $H(F)$. Evidentemente, H' aumenta con “ \mathbf{r} ”. Además, mientras que $H' = H(F)$ cuando $\mathbf{r} = 0$ se tiene $H' = 1$ si $\mathbf{r} = 1$. Dicho de otra manera, si todos los créditos de la cartera están perfecta y positivamente correlacionados, en términos de riesgo se comportan como si fueran un solo crédito. En general, se puede decir que el portafolio de créditos correlacionados entre si, y concentrado según $H(F)$ se comporta exactamente de la misma forma que uno de créditos independientes pero con índice de concentración H' , en lugar de $H(F)$. Así, H' puede considerarse como un índice de concentración ajustado por correlación.

Además, (2.11) sirve para calcular este índice. Para esto de la expresión (2.3) recuérdese que la varianza de incumplimientos de la cartera es $\mathbf{s}^2 H(F) = R(M,F) \cdot H(F)$. Entonces si se iguala la varianza de la cartera con la varianza del caso particular bajo análisis, se tienen que encontrar “ p ” y “ \mathbf{r} ”, que satisfagan:

$$p(1-p) \cdot H' = p \cdot (1-p) \cdot [\mathbf{r} + (1-\mathbf{r})H(F)] = R(M,F) \cdot H(F) \quad (2.12)$$

Finalmente, si $p = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{F}}{V}$, despejando \mathbf{r} se obtiene:

$$\mathbf{r} = \frac{\left(\frac{R(M,F)}{p \cdot (1-p)} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{H(F)} - 1 \right)} = \frac{[R(M,F) - p \cdot (1-p)]H(F)}{p \cdot (1-p)[1 - H(F)]} \quad (2.13)$$

Esta expresión proporciona una medida de correlación equivalente, que resume la forma en que están correlacionados a pares todos los créditos de la cartera.

EJEMPLO 2.1

Para poder ver el significado de los resultados anteriores, a continuación se hace un pequeño ejemplo numérico. Considérese el siguiente portafolio de 25 créditos tomado del manual de **CreditRisk⁺**:

Tabla 2.1.

N° of loans Créditos	RATING							TOTAL
	A	B	C	D	E	F	G	
1	\$4,728	\$5,528	\$3,138	\$5,320	\$1,800	\$1,933	\$358	\$22,805
2	\$7,728	\$5,848	\$3,204	\$5,765	\$5,042	\$2,317	\$1,090	\$30,994
3			\$4,831	\$20,239	\$15,411	\$2,411	\$2,652	\$45,544
4			\$4,912			\$2,598	\$4,929	\$12,439
5			\$5,435				\$6,467	\$11,902
6							\$6,480	\$6,480
TOTAL	\$12,456	\$11,376	\$21,520	\$31,324	\$22,253	\$9,259	\$21,976	\$130,164

Las probabilidades de impago para los créditos se toman de la siguiente tabla:

Tabla 2.2.

Calificación	Prob. De Incump. (%)
A	1.65
B	3.00
C	5.00
D	7.50
E	10.00
F	15.00
G	30.00

La matriz de covarianzas es la misma que se utilizó en esos ejemplos y se puede ver en el apéndice “A”. Esta matriz está segmentada en tres grupos según:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & M_2 & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & M_3 \end{bmatrix}$$

Suponiendo normalidad y un nivel de confianza del 5%, el VaR de la cartera es:

$$VaR_{.05} = \mathbf{p}^T F + z_{.05} \sqrt{F^T M F} = 14,179 + 1.96(21,176) = \$55,683$$

De los ejemplos del documento original se sabe que $p = 0.1089$, $H(F) = 0.0661$, y al hacer los cálculos correspondientes se obtiene:

$$s = \sqrt{\frac{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}} = \sqrt{0.4006} = 0.6329$$

La condición de suficiencia de capital es:

$$\psi > \bar{p} + z_\alpha \sigma \sqrt{H(F)} = 0.4278$$

Suponiendo $K = \$60,000$, de manera que $\psi = \frac{60,000}{130,164} = 0.4610$. La relación (2.6) proporciona el límite individual para los créditos

$$\theta \leq \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 = \left(\frac{0.4610 - 0.1089}{1.96(0.6329)} \right)^2 = 0.0805$$

Es decir:

$$f_i \leq 0.0805 \times \$130,164 = \$10,482$$

De la tabla 2.1 se ve que hay sólo dos créditos que exceden de manera significativa el límite.

Ahora se examina el impacto de la correlación sobre la concentración. De (2.13) se obtiene la correlación equivalente de la cartera:

$$r = \frac{[0.4006 - 0.0978] \times 0.0661}{0.0978 \times [1 - 0.0661]} = 0.2191$$

De (2.11), el índice de concentración corregido por correlación es:

$$H' = 0.2191 + (1 - 0.2191) \cdot 0.0661 = 0.2707$$

Independientemente del hecho de que esta cartera es bastante mala, al añadir una correlación de 22% a una probabilidad promedio de incumplimiento de la cartera de 10.89% se obtiene una desviación estándar de incumplimientos de $\sigma \sqrt{H(F)} = 0.1627$, comparada con $\sqrt{p(1-p)H(F)} = 0.0801$ si los créditos fueran independientes. Así, la correlación equivalente del 22% duplica la desviación estándar de incumplimientos respecto al caso de créditos independientes. También resulta interesante comparar el índice de concentración corregido por correlación $H' = 27.07\%$, que es cuatro veces mayor que el índice de concentración $H(F) = 6.61\%$. En términos de suficiencia de capital, la cartera correlacionada requiere $y \approx 43\%$ que es 59% más del 27% requerido en caso de que los créditos fuesen independientes. §

3. El tratamiento de Diferentes Dimensiones de Concentración

En esta sección se adecúan las relaciones del modelo original utilizando el cociente de Rayleigh. Siguiendo el desarrollo del modelo original, se hace una partición arbitraria de F en h clases, $F^T = (F_1, \dots, F_h)$, donde F_i es un vector que contiene los saldos de los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento. Ahora se particionan el vector de probabilidades esperadas de incumplimiento y la matriz de varianza-covarianza, de esta manera:

- a) $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_i)$; Partición del vector de probabilidades de impago, donde “ \mathbf{p}_i ” es el vector de probabilidades de impago del segmento i ; $i = 1, 2, 3, \dots, h$
- b) La matriz de varianza-covarianza se particiona como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & C_{12} & \cdots & C_{1h} \\ C_{21} & M_2 & \cdots & C_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{h1} & C_{h2} & \cdots & M_h \end{bmatrix} \quad (3.0)$$

Cada submatríz M_i corresponde a la matriz de varianza-covarianza *idiosincrática* del grupo “ i ” y tiene dimensión $(N_i \times N_i)$; donde N_i es el número de créditos en el segmento. Todas estas matrices son positivas definidas al igual que \mathbf{M} y las matrices “ C_{ij} ” contienen las covarianzas de las probabilidades de impago entre los créditos del grupo “ i ” y las del grupo “ j ”.

A partir de aquí, sea $V_i = \sum_{j \in F_i} f_j$, el valor de la cartera asociada al segmento “ i ”, y

$\sum_{i=1}^h V_i = V$. Ahora, sea $K_i = \mathbf{g}_i K$, donde “ \mathbf{g}_i ” es la proporción del capital asignado al

segmento “ i ”; $\mathbf{g}_i \in [0, 1] \forall i$; $\sum_{i=1}^h \mathbf{g}_i = 1$. Para efectos de partición, se hizo un pequeño cambio a la matriz “ \mathbf{S}_i ”, que ahora tiene la forma siguiente³:

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & C_{li} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{il} & \cdots & 2M_i & \cdots & C_{ih} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{hi} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

³ Esta definición de la matriz difiere de la que se propuso en el trabajo original y tiene la ventaja descrita en el texto.

Cada matriz ‘ \mathbf{S}_i ’ solamente toma en cuenta las correlaciones entre incumplimientos de los créditos del grupo ‘ i ’ con los de los demás grupos, pero elimina las correlaciones entre los demás grupos entre si, que no inciden directamente sobre el segmento bajo análisis. Nótese que tal como está planteada, a diferencia de la definida en el trabajo original, estas matrices tienen la propiedad de que:

$$\sum_i \mathbf{S}_i = \mathbf{M}$$

Al igual que en el modelo original, la constante que permite sumar los VaR individuales para obtener el del total de la cartera es:

$$\mathbf{f} = \frac{\sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}}{\sum_{i=1}^h \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}}} \quad (3.2)$$

Procediendo de la forma acostumbrada, defínase:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{F}_i + z_a \mathbf{f} \sqrt{\mathbf{F}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i} \leq K_i = \mathbf{g}_i K \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, h \quad (3.3)$$

Donde $\mathbf{g}_i \geq 0$ y $\sum_i \mathbf{g}_i = 1$. Es fácil verificar que $\sum_i \mathbf{n}_i = VaR_a = \mathbf{p}^T \mathbf{F} + z_a \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}$.

Ahora, dividiendo (3.3) por V_i , conduce a:

$$\mathbf{y}_i \geq \frac{\mathbf{n}_i}{V_i} = \bar{p}_i + z_a \mathbf{f} \sqrt{R_i(\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i) H(\mathbf{F}_i) + \frac{1}{(\mathbf{1}^T \mathbf{F}_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j} \quad (3.4)$$

Resolviendo para $H(\mathbf{F}_i)$ se obtiene,

$$H(\mathbf{F}_i) \leq \left(\frac{\mathbf{y}_i - \bar{p}_i}{z_a \mathbf{f} \mathbf{s}_i} \right)^2 - \frac{1}{(\mathbf{s}_i V_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \quad (3.5)$$

donde

$$\mathbf{s}_i = \sqrt{\frac{\mathbf{F}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{F}_i}{\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i}} = \sqrt{R_i(\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i)} \quad (3.6)$$

y por el Teorema 5.2,

$$\mathbf{q}_i \leq \left(\frac{\mathbf{y}_i - \bar{p}_i}{z_a \mathbf{f} \mathbf{s}_i} \right)^2 - \frac{1}{(\mathbf{s}_i V_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \quad (3.7)$$

En lo anterior, (3.4) establece la suficiencia de capital para cada segmento, (3.5) es el límite de concentración para el segmento, y (3.8) es la expresión para los límites individuales.

Haciendo $g_i = \frac{V_i}{V}$, $y = \sum_{i=1}^h g_i y_i$ asegura suficiencia de capital para el portafolio.

EJEMPLO 3.1.

Para ilustrar los resultados que cede el modelo actualizado, en comparación con el del artículo original, se usará la misma cartera del ejemplo 7.2. La segmentación de ésta presenta en la tabla 3.1.

Cuadro 3.1

Calificación	F1	Calificación	F2	Calificación	F3
A1	\$ 4,728	B1	\$ 5,528	A2	\$ 7,728
C2	\$ 3,204	C1	\$ 3,138	B2	\$ 5,848
C4	\$ 4,912	C3	\$ 4,831	C5	\$ 5,435
D1	\$ 5,320	E2	\$ 5,042	D2	\$ 5,765
D3	\$ 20,239	E3	\$ 15,411	E1	\$ 1,800
F1	\$ 1,933	F3	\$ 2,411	F2	\$ 2,317
F4	\$ 2,598	G1	\$ 358	G3	\$ 2,652
G2	\$ 1,090	G5	\$ 6,467	G4	\$ 4,929
Total=	\$ 44,024	Total=	\$ 43,186	Total=	\$ 42,954

Refiriéndose al apéndice “A”, las matrices S_i para cada segmento tienen la forma:

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2M_1 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & 0 \\ C_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ C_{21} & 2M_2 & C_{23} \\ 0 & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } S_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 2M_3 \end{bmatrix}.$$

En el cuadro 3.2 se resumen los valores de la cartera, sus índices de concentración y el capital asignado para cada segmento.

Cuadro 3.2.

Segmento i	V_i	$H(F_i)$	g_i	K_i
1	\$ 44,024	0.2613	0.3382	\$ 20,293
2	\$ 43,186	0.2008	0.3318	\$ 19,907
3	\$ 42,954	0.1293	0.33	\$ 19,800

De (3.2), el parámetro ϕ que permite la suma de los VaR ajustados es:

$$\mathbf{f} = \frac{\sqrt{F^T M F}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{F^T S_i F}} = 0.5783$$

Al calcular \mathbf{n}_i con (3.3), usando un nivel de confianza de 5% y suponiendo normalidad se obtienen las siguientes relaciones para suficiencia de capital:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \$16,122 < K_1 = \$20,293, \\ \mathbf{n}_2 &= \$19,268 < K_2 = \$19,907, \\ \mathbf{n}_3 &= \$20,293 > K_3 = \$19,800. \end{aligned}$$

Nótese que los resultados difieren de los obtenidos en el ejemplo 7.2 del modelo original, evidenciando aún más que el tercer segmento es el más riesgoso ya que el capital asignado al último segmento no cubre su riesgo. Esto se debe a la nueva definición de la matriz S_i que resulta en un valor significativamente mayor del parámetro de normalización \mathbf{f} .

Nótese que como $\gamma_i = \frac{V_i}{V}$, necesariamente se tiene que:

$$\mathbf{y}_i = \frac{K_i}{V_i} = \frac{\mathbf{g}_i \times K}{V_i} = \frac{K}{V} = \frac{60,000}{130,164} = 0.4610$$

para todos los segmentos. El siguiente cuadro muestra las probabilidades esperadas de impago, el cociente de Rayleigh y el índice de Herfindahl-Hirschman corregido por correlación:

Cuadro 3.3.

Segmento i	P_i	$R_i(F_i, M_i)$	Corrección por correlación
1	0.0774	0.0998	0.3895
2	0.1162	0.1741	0.2860
3	0.1339	0.3340	0.1377

Con estos valores, pueden verificarse las relaciones (3.5) para todos los segmentos del portafolio. Como era de esperarse, el tercer grupo es el crítico:

$$H(F_3) = 0.1293 > \left(\frac{y_i - \bar{p}_i}{z_a \mathbf{f} \mathbf{s}_i} \right)^2 - \frac{1}{(\mathbf{s}_i V_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j = 0.1115$$

Ahora, de (3.7) se obtienen los mismos resultados del ejemplo 7.2 del modelo original, para los límites individuales que implican suficiencia de capital:

$$\theta_1 \leq 1.1478 - 0.3895 = 0.7583; f_1 \leq 0.7583 \times \$44,024 = \$33,384$$

$$\theta_2 \leq 0.5314 - 0.2860 = 0.2454; f_2 \leq 0.2454 \times \$43,186 = \$10,596$$

$$\theta_3 \leq 0.2492 - 0.1377 = 0.1115; f_3 \leq 0.1115 \times \$42,954 = \$4,790$$

En resumen, ningún crédito del primer grupo excede su límite, mientras que en el segundo, el crédito de \$15,411 rebasa su cota. Finalmente, como era de esperarse el tercer grupo es el más problemático ya que sólo los tres créditos más pequeños respetan el límite. Es interesante analizar los efectos de la correlación en este ejemplo. Lo anterior establece que el primer grupo puede tener créditos de cualquier tamaño, pero por otro lado, el segmento más riesgoso debe incluir sólo créditos muy pequeños, lo cual aunque es lógico, claramente no se cumple.

Ahora, con respecto a suficiencia de capital, se examina (3.8) y al comparar \mathbf{y} con $\sum \gamma_i \frac{V_i}{V_i}$, se obtiene:

$$\mathbf{y} = 0.4610 \geq \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{n}_i}{V_i} = \frac{VaR}{V} = \frac{55,684}{130,164} = 0.4278,$$

Nótese que el resultado es el mismo que el del ejemplo 7.1, y que la nueva especificación del modelo es congruente con el original, aunque simplifica considerablemente los cálculos. Sin embargo se nota una mejoría por la nueva definición de la matriz \mathbf{S}_i , que resalta aún más las diferencias de riesgos entre segmentos. §

4. Aprovechamiento de la estructura para la simplificación del cálculo y aplicación del modelo con información limitada.

En la práctica, cualquiera de las metodologías de riesgo crédito tiene implícita o explícitamente, un criterio de segmentación de la cartera, en donde se supone que los créditos de cada segmento, comparten ciertas características en común. Por ejemplo, en **CreditMetrics™**, la agrupación de créditos está en relación a su calificación y su prelación, lo cual implica que todos los créditos dentro de un segmento tienen las mismas probabilidades de incumplimiento y migración a diferentes estados de calidad. Además, implica que tienen las mismas curvas de tasas de descuento para efectos de marcación a mercado, y las mismas tasas de pérdida dado incumplimiento en caso de caer en impago.

Análogamente, en **CreditRisk**⁺, el criterio de agrupación es el de la pérdida dado incumplimiento; es decir: Se supone que para todos los créditos dentro de una “cubeta”, la pérdida es el mismo número de “unidades estándar” en caso de incumplimiento. Además, se supone que todos los créditos con la misma calificación, y que responden de la misma manera a los factores de riesgo que los explican, tienen la misma probabilidad de incumplimiento. Esto a su vez lleva el supuesto implícito, de que se pueden identificar grupos de créditos cuya correlación de incumplimiento es la misma con respecto a los créditos de otros grupos.

4.1 Relaciones Básicas.

En **CyRCE**, aunque el modelo es totalmente general y no hay restricción alguna para que cada crédito tenga una probabilidad de incumplimiento diferente y las correlaciones puedan ser diferentes entre cualquier pareja de créditos de la cartera bajo análisis, es conveniente adoptar algún tipo de taxonomía, porque de otra manera, el problema de estimación de parámetros se vuelve imposible en la práctica. A nuestro juicio, como la agrupación puede ser totalmente arbitraria, se tiene mayor flexibilidad para escoger un criterio de clasificación, ya sea porque de antemano se sabe (o intuye) que las características de riesgo de cada segmento definido responden de manera diferente a los factores de riesgo que los determinan, porque la agrupación permite obtener confiabilidad estadística en la estimación de parámetros, o por una combinación de ambas. Así, para efectos de estimación, se puede suponer que al interior de cada grupo las probabilidades de incumplimiento “ p_i ” y la correlación “ r_i ” entre dos créditos cualesquiera dentro del grupo son las mismas. Además, se puede suponer que entre grupos, la correlación “ r_{ij} ” de incumplimiento entre cualquier pareja de créditos, donde uno pertenece al grupo “ i ” y el otro al grupo “ j ”, es siempre la misma. Además de lo que esto significa en términos de la detección de concentraciones excesivas de riesgo ya discutidas en las secciones anteriores, esto proporciona una estructura al modelo que tiene implicaciones muy importantes en cuanto a estimación de parámetros y ahorro de recursos de cómputo.

Así, si se supone que dentro de cada segmento las probabilidades de incumplimiento de los créditos son idénticas y cada pareja de créditos están correlacionadas de la misma manera, se tiene que:

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \mathbf{r}_{ij} = \sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_j(1-p_j)} \mathbf{r}_{ij} = p_i(1-p_i) \mathbf{r}_i \quad \text{cuando } i = j \quad (2.7)$$

Esto a su vez, de (2.9), significa que la matriz de covarianzas idiosincrática de cada segmento tiene la estructura siguiente:

$$\mathbf{M}_i = p_i(1-p_i) \{ \mathbf{r}_i \mathbf{1}_i \mathbf{1}_i^T + (1-r_i) \mathbf{I}_i \} \quad (4.1)$$

Análogamente, nótese que las submatrices C_{ij} de la matriz \mathbf{M} , tienen la estructura siguiente:

$$C_{ij} = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{ij} & \cdots & \mathbf{r}_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_{ij} & \cdots & \mathbf{r}_{ij} \end{pmatrix} = \sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_j(1-p_j)} \mathbf{r}_{ij} (\mathbf{1}_i \mathbf{1}_j^T) \quad (4.2)$$

Con esto la expresión para la varianza de pérdidas para segmentos individuales queda:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{S}_i \mathbf{F} = \left. \begin{aligned} & p_i(1-p_i) \left\{ \mathbf{r}_i (\mathbf{1}_i^T \mathbf{F}_i)^2 + (1-r_i) \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i \right\} + \\ & \sqrt{p_i(1-p_i)} \sum_{j \neq i} \sqrt{p_j(1-p_j)} \mathbf{r}_{ij} (\mathbf{1}_i^T \mathbf{F}_i) (\mathbf{1}_j^T \mathbf{F}_j) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Recordando que $\mathbf{1}_i^T \mathbf{F}_i = V_i$ se obtiene:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{S}_i \mathbf{F} = V_i^2 \left\{ p_i(1-p_i) H_i' + \frac{\sqrt{p_i(1-p_i)}}{V_i} \sum_{j \neq i} \sqrt{p_j(1-p_j)} \mathbf{r}_{ij} V_j \right\} \quad (4.4)$$

donde

$$H_i' = \mathbf{r}_i + (1-r_i) H(\mathbf{F}_i)$$

es el índice de concentración ajustado por correlación del segmento “i”. Nótese que en (4.4) se han eliminado todas las multiplicaciones de matrices, lo cual implica ahorros significativos tanto en la memoria requerida para almacenar los datos, como en las operaciones de cálculo en si. Recordando que:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \left(\sum_i \mathbf{S}_i \right) \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}^T \mathbf{S}_i \mathbf{F} \quad (4.5)$$

una vez hecho el cálculo de la varianza de pérdidas para todos los segmentos, es muy eficiente hacer el análisis para cada segmento y toda la cartera, desde la expresión (2.1) hasta la (3.7).

4.2. Aplicación del modelo con información limitada sobre la cartera de créditos: Obtención del índice de Herfindahl-Hirschman.

Cualquier modelo de riesgo crédito requiere dos tipos de información, a saber: Una descripción de la distribución (por tamaños) de la cartera de créditos, sus probabilidades de incumplimiento y como se correlacionan los incumplimientos entre los créditos. El modelo desarrollado presenta varias opciones para hacer cálculos con información limitada. Del inciso anterior, debe ser evidente que no es estrictamente necesario conocer en detalle la configuración de la cartera de créditos. Nótese que, partiendo de una segmentación

cualquiera de la cartera, la única información que se requiere es: El valor total de los créditos en cada segmento “ V_i ”, alguna información sobre la distribución de los créditos dentro del segmento que permita estimar el índice de Herfindahl, estimaciones de probabilidades de incumplimiento “ p_i ”, las correlaciones de incumplimiento para los créditos dentro de cada segmento “ r_i ” y las correlaciones de incumplimiento entre créditos de diferentes segmentos “ r_{ij} ”.

El problema de estimación de probabilidades de incumplimiento y correlaciones se aborda en la siguiente sección. En ésta sólo se discutirá como se pueden obtener estimaciones del índice de Herfindahl con algunas estadísticas básicas. Así, supóngase que la cartera se ha segmentado en “ h ” grupos distintos. En primer término, si además de conocer el valor de la cartera de créditos de cada segmento V_i , se conoce el crédito más grande de cada segmento, “ f_i^* ”, entonces el teorema 6.1 del artículo original, que se presenta en el apéndice “A”, dice que:

$$H(\mathbf{F}_i) \leq q_i = \frac{f_i^*}{V_i} \quad (4.6)$$

Por lo tanto, si se hace $H(\mathbf{F}_i) = q_i$, se tiene una aproximación del índice de concentración para cada segmento. Normalmente, la estimación es muy conservadora.

Si se puede contar con datos del número de créditos por segmento N_i , el crédito promedio \bar{f}_i y la varianza del tamaño de los créditos \bar{s}_i^2 , entonces se puede conocer el índice con toda precisión. Para esto, primero nótese que $V_i = N_i \bar{f}_i$ es el valor de la cartera de créditos del segmento “ i ”, y que el valor de toda la cartera es simplemente $V = \sum_{i=1}^h V_i$. Entonces:

$$\begin{aligned} \bar{s}_i^2 &= \frac{\sum_k (f_k^i - \bar{f}_i)^2}{N_i - 1} = \frac{1}{N_i - 1} \sum_k [(f_k^i)^2 - 2f_k^i \bar{f}_i + (\bar{f}_i)^2] = \frac{(N_i \bar{f}_i)^2}{(N_i - 1)(N_i \bar{f}_i)^2} \left\{ \sum_k (f_k^i)^2 - N_i (\bar{f}_i)^2 \right\} \\ &= \frac{(N_i \bar{f}_i)^2}{(N_i - 1)} \left\{ \sum_k \frac{(f_k^i)^2}{(N_i \bar{f}_i)^2} - \frac{1}{N_i} \right\} = \frac{(V_i)^2}{(N_i - 1)} \left\{ H(\mathbf{F}_i) - \frac{1}{N_i} \right\} \end{aligned}$$

De aquí se puede despejar el índice:

$$\boxed{H(\mathbf{F}_i) = \frac{(N_i - 1)}{N_i^2} \left(\frac{\mathbf{s}_i}{\bar{f}_i} \right)^2 + \frac{1}{N_i}} \quad (4.7)$$

Ahora, habiendo obtenido el índice de concentración por segmento, se puede conocer el de toda la cartera. de la forma siguiente:

$$H(\mathbf{F}) = \frac{1}{V^2} \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{N_i} f_{i,k}^2 = \frac{1}{V^2} \sum_{i=1}^h V_i^2 \sum_{k=1}^{N_i} \frac{f_{i,k}^2}{V_i^2} = \sum_{i=1}^h \left(\frac{V_i}{V} \right)^2 H(\mathbf{F}_i) \quad (4.8)$$

En resumen, las expresiones (4.7) y (4.8) son cifras exactas para los respectivos índices de concentración. Se obtienen con información bastante limitada y sin la necesidad de conocer la cartera; es decir: Solo se necesita conocer por cada segmento: El número de créditos y el valor de la cartera o en su defecto, el valor promedio de los créditos, y la varianza o la desviación estándar del valor de los créditos.

5. Estimación de Probabilidades de Incumplimiento y Correlaciones Idiosincráticas.

Normalmente, el vehículo más socorrido para obtener probabilidades de incumplimiento es mediante esquemas de calificaciones. De hecho, paradigmas tan acreditados como **CreditRisk⁺** ó **CreditMetricsTM** dependen por diseño, de que los créditos de la cartera bajo análisis esté calificada. Evidentemente, si un banco cuenta con un buen sistema para calificar deudores, y se ha realizado el trabajo básico de obtener estadísticas sobre tasas de incumplimiento asociadas a cada calificación, esto es útil para obtener probabilidades de incumplimiento y sus respectivas correlaciones. En el caso de deudores calificados por alguna de las grandes empresas calificadoras como Standard & Poors', Moodys' o Fitch, se puede usar la información que ellos mismos producen.

Aunque los sistemas de calificaciones tienen un valor práctico indiscutible, es necesario notar que, el utilizar probabilidades de incumplimiento asociadas a esquemas de clasificación, presenta algunos problemas. En primer lugar, prácticamente obliga a segmentar la cartera de créditos de acuerdo a las calificaciones, lo cual no necesariamente es deseable para propósitos de identificar segmentos riesgosos de la cartera. Por ejemplo, frecuentemente se pone la misma calificación a deudores que desempeñan su actividad en sectores distintos, y que por lo tanto, sus probabilidades de incumplimiento obedecen a factores de riesgo diferentes, o responden a los mismos factores de riesgo de diferente manera. Por esta razón, ante el comportamiento cambiante de los factores de riesgo, se puede tener una apreciación errónea de los niveles de riesgo en los distintos rubros de calificación.

Así, es necesario hacer hincapié en que un sistema de calificaciones no es un requisito indispensable para la estimación de probabilidades de incumplimiento. De hecho, la base de cualquier estimación de probabilidades de incumplimiento y correlaciones, son las tasas de incumplimiento de deudores en diferentes segmentos, independientemente de si los segmentos están asociados a calificaciones o no. Esto lo ha probado KMV con toda claridad, y actualmente hay mucha investigación en este campo, en donde se busca estimar

probabilidades de incumplimiento principalmente en base al comportamiento estocástico de los factores de riesgo que determinan las probabilidades de incumplimiento.⁴

Regresando a la relación básica del modelo (2.1), de VaR y suficiencia de capital, los elementos más importantes de la medida de riesgo están dados por \mathbf{p} , el vector de probabilidades de incumplimiento y \mathbf{M} , la matriz de covarianzas entre incumplimientos de los créditos del portafolio. A lo largo de este artículo, se ha supuesto que la cartera de créditos se segmenta según $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_h)$, donde \mathbf{F}_i es un vector que contiene los saldos de los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento. Por consistencia, es necesario además, particionar el vector de probabilidades de incumplimiento y la matriz de varianza-covarianza como ya se ha indicado en la tercera sección; es decir: Para cada segmento se tiene el vector " \mathbf{p}_i " de probabilidades de incumplimiento de los créditos del segmento i ; $i = 1, 2, 3, \dots, h$. Además, a cada segmento le corresponde una matriz de covarianzas idiosincrática \mathbf{M}_i de dimensión $(N_i \times N_i)$; donde N_i es el número de créditos en el segmento. En esta sección se aborda el tema de la estimación de estas matrices, suponiendo que al interior de cada segmento, los créditos tienen las mismas probabilidades de incumplimiento y están idénticamente correlacionadas a pares. Cabe destacar que todas estas matrices son positivas definidas al igual que \mathbf{M} .

En particular, como se verá en lo que sigue, el problema de estimar los coeficientes de correlación para los créditos al interior de cada segmento es técnicamente complicado, porque se requiere una forma funcional para la distribución de probabilidad binomial multivariada y correlacionada, y difiere significativamente de la forma en que se acostumbra pensar en la correlación, que se discute en la sección seis siguiente.

A continuación se discuten varias formas de estimar la probabilidad de incumplimiento y los coeficientes de correlación para los créditos que conforman un segmento del portafolio, suponiendo que se tienen datos sobre tasas de incumplimiento de deudores para los diferentes segmentos de la cartera. Se presentan los resultados teóricos relevantes sobre la probabilidad de incumplimiento y el coeficiente de correlación, y los distintos estimadores propuestos. Al final de cada sección se muestran los resultados obtenidos. Aunque el principal interés de la estimación de parámetros se inscribe en el contexto de CyRCE, los autores piensan que los mismos conceptos son aplicables a otros paradigmas.

5.1. Probabilidades de Incumplimiento.

Como se señaló en la introducción anterior, el punto de partida para estimar probabilidades y correlaciones de incumplimiento de créditos es la *tasa de impago* observada históricamente. Actualmente se acepta que las probabilidades de incumplimiento cambian en el tiempo, obedeciendo al comportamiento de los factores de riesgo que las afectan; por ejemplo: Las tasas de interés, el PIB de los diferentes sectores económicos y la economía en general, el tipo de cambio, el nivel de empleo, etc. Para iniciar la discusión, empecemos analizando un caso simple en el que se supone que la probabilidad de incumplimiento de un

⁴ Véase Cossin y Pirotte, 2001.

grupo de créditos es la misma en un cierto horizonte de tiempo “ T ” dividido en “ n ” periodos. Una estimación de dicha probabilidad, que intuitivamente se antoja razonable, es tomar un promedio móvil ponderado de las tasas de impago observadas en los “ n ” periodos del horizonte considerado. Esto conlleva implícitamente el supuesto de independencia entre las tasas de incumplimiento históricas. Una pequeña complicación adicional es la naturaleza cambiante de la propia cartera de créditos; es decir: En la práctica se observa que las carteras de los bancos cambian en sus distintos segmentos, cualquiera que haya sido el criterio de segmentación utilizado; tanto en el número de créditos como en su tamaño. Además, los cambios pueden ser significativos de un periodo a otro.

5.1.1. Un estimador máximo verosímil de la probabilidad de incumplimiento bajo el supuesto de independencia.

En todos los métodos de estimación, se supone que se conocen los datos siguientes:

N_t = Número de créditos vigentes en la cartera en el periodo “ t ”; $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$

k_t = Número de créditos vigentes en “ $t-1$ ” que incumplen en el periodo t ; $t = 1, 2, 3, \dots, n$

Por definición, la tasa de incumplimiento π_t para cada periodo t ; $t = 1, 2, 3, \dots, n$ es:

$$\mathbf{p}_t = \frac{k_t}{N_{t-1}} \quad (5.1)$$

Entonces, suponiendo que todos los créditos de la cartera tienen la misma probabilidad de incumplimiento “ p ” y que son independientes, la variable aleatoria que denota el número de incumplimientos en cada periodo de tiempo se distribuye según una binomial; es decir:

$$\Pr\{N^\circ \text{ de impagos} = k_t; p\} = \binom{N_{t-1}}{k_t} p^{k_t} (1-p)^{(N_{t-1}-k_t)} ; t = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Si los incumplimientos de un periodo a otro son independientes, el estimador de máxima verosimilitud de “ p ” se obtiene de *maximizar la probabilidad de que se haya observado la sucesión p_1, p_2, \dots, p_n* ; es decir:

$$\mathbf{Max}_p \Pr\{k_1, k_2, \dots, k_n; p\} = \mathbf{Max}_p \prod_{t=1}^n \binom{N_{t-1}}{k_t} p^{k_t} (1-p)^{(N_{t-1}-k_t)} \quad (5.3)$$

Ahora, sean $r = \sum_{t=1}^n k_t$; $s = \sum_{t=1}^n (N_{t-1} - k_t)$. Como $\begin{pmatrix} N_{t-1} \\ k_t \end{pmatrix}$ son constantes, la probabilidad de incumplimiento “ p ” que maximiza (5.3) es la misma que maximiza la expresión, $p^r(1-p)^s$. Tomando la primera derivada de esta expresión e igualando a cero, se obtiene la expresión dada por:

$$p^{r-1}(1-p)^{s-1}[r(1-p) - sp] = 0.$$

Obviamente, la expresión anterior es cero tanto en “ $p = 0$ ” como en “ $p = 1$ ”; sin embargo estos son mínimos y no máximos para (5.3). Por lo tanto, la solución de interés es la que satisface “ $r(1-p) - sp = 0$ ”, es decir:

$$p = \frac{r}{r+s} = \frac{\sum_{t=1}^n k_t}{\sum_{t=1}^n N_{t-1}} \quad (5.4)$$

En términos de tasas de incumplimiento aplicando (5.1) se obtiene,

$$p = \frac{\sum_{t=1}^n N_{t-1} p_t}{\sum_{t=1}^n N_{t-1}} = \sum_{t=1}^n \frac{N_{t-1}}{N} p_t ; \quad N = \sum_{t=1}^n N_{t-1} \quad (5.5)$$

Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de incumplimiento es el promedio ponderado de las tasas de impago, donde el ponderador en cada periodo es la proporción que representa el número de créditos vigentes en cada periodo, respecto a la suma total de créditos vigentes en el horizonte considerado.

5.2. La distribución binomial del número de incumplimientos cuando los créditos están correlacionados a pares.

En este apartado se propone una distribución de probabilidad binomial conjunta asociada al número de incumplimientos, relajando el supuesto de independencia. De hecho, lo que se está buscando es una expresión para una distribución binomial multivariada, en donde las variables Bernoulli que la componen estén correlacionadas. Con el objeto de desarrollar un poco de intuición sobre el problema, en primer lugar se analiza el caso en que sólo hay dos variables Bernoulli con la misma probabilidad “ p ” de ocurrencia, que están correlacionadas entre sí por medio del coeficiente de correlación “ r ”; es decir:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{con } p \\ 0 & \text{con } 1-p \end{cases}; i = 1, 2 \quad (5.6)$$

donde $0 \leq p \leq 1$.

En este caso se sabe que:

$$E(x_i) = p \text{ y que } Var(x_i) = p(1-p) = \mathbf{s}^2 \quad (5.7)$$

Se supone que existe $\mathbf{r} \in [-1, 1]$, que por definición es:

$$\mathbf{r} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\mathbf{s}^2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{p(1-p)} \quad (5.8)$$

El problema consiste en encontrar una expresión para:

$$\Pr\{x_1 = k_1, x_2 = k_2; p, \mathbf{r}\} \equiv P_{k_1 k_2}; \quad k_1, k_2 \in \{0, 1\}.$$

Por definición de la covarianza entre variables aleatorias se sabe que

$$\text{cov}(x_1, x_2) = E(x_1 x_2) - E(x_1)E(x_2) \quad (5.9)$$

y sustituyendo (5.7) y (5.8) se sabe que:

$$E(x_1 x_2) = p^2 + \mathbf{r} \cdot p(1-p) \quad (5.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E(x_1 x_2) &= \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 k_1 k_2 \Pr\{x_1 = k_1, x_2 = k_2\} \\ &= \Pr\{x_1 = 1, x_2 = 1\} \\ &= P_{11} \end{aligned} .$$

Por lo tanto

$$P_{11} = p^2 + \mathbf{r} \cdot p(1-p) \quad (5.11)$$

Procediendo de la misma manera para los casos restantes,

$$\begin{aligned} E(1-x_1)x_2 &= \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 (1-k_1)k_2 \Pr\{x_1 = k_1, x_2 = k_2\} \\ &= \Pr\{x_1 = 0, x_2 = 1\} \\ &= P_{01} \end{aligned} .$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= E(x_2) - E(x_1 x_2) \\
 &= p - p^2 - r \cdot p(1-p) \\
 &= p(1-p)(1-r)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Las expresiones para los dos casos restantes, P_{00} y P_{10} , se obtienen desarrollando $E(1-x_1)(1-x_2)$ y $E x_1(1-x_2)$ respectivamente. Es evidente que $P_{10} = P_{01}$ y que:

$$P_{00} = (1-p)^2 + r \cdot p(1-p) \tag{5.13}$$

De este análisis, se deduce la expresión general para la distribución Bernoulli bivariada que está dada por:

$$\Pr\{x_1 = k_1, x_2 = k_2 | k_1, k_2 \in \{0,1\}\} = p^{k_1+k_2} (1-p)^{2-k_1-k_2} + (-1)^{k_1+k_2} r \cdot p(1-p) \tag{5.14}$$

Solo falta comprobar que lo anterior es una distribución de probabilidad. Por el desarrollo hecho, fácilmente se verifica que las probabilidades suman uno. Sin embargo, es importante analizar la posibilidad de que el coeficiente de correlación esté sujeto a alguna restricción adicional, para asegurar que todas las probabilidades están en el intervalo $[0,1]$; es decir:

$$0 \leq \Pr\{K_1 = k_1, K_2 = k_2 | k_1, k_2 \in \{0,1\}\} \leq 1.$$

Para poder garantizar la no negatividad, de (5.10), (5.11) y (5.12), se requiere que :

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{p}{(1-p)} \leq r \leq 1 \\
 -\frac{1-p}{p} \leq r \leq 1
 \end{aligned} \right\} \tag{5.15}$$

Estas restricciones se resumen en la expresión siguiente:

$$-\min\left\{\frac{p}{1-p}, \frac{1-p}{p}\right\} \leq r \leq 1 \tag{5.16}$$

Para concluir, nótese que:

$$\frac{1-p}{p} \geq \frac{p}{1-p} \text{ para } 0 \leq p \leq 0.5,$$

y que

$$\frac{1-p}{p} \leq \frac{p}{1-p} \text{ para } 0.5 < p \leq 1.$$

Si $p = 0.5$ entonces

$$\frac{1-p}{p} = \frac{p}{1-p} = 1.$$

De estas observaciones se deduce que,

$$-\min \left\{ \frac{p}{1-p}, \frac{1-p}{p} \right\} \leq r \leq 1 \text{ para cualquier } p \in [0,1]$$

y por lo tanto no hay ninguna restricción adicional sobre r , salvo que $-1 \leq r \leq 1$.

Para concluir, la binomial bivariada y correlacionada, se puede ver como la suma de dos variables Bernoulli correlacionadas; es decir:

$$\Pr\{x_1 + x_2 = k; p, r\} = \binom{2}{k} \left[p^k (1-p)^{2-k} + (-1)^k r \cdot p(1-p) \right] ; k=0,1,2 \quad (5.17)$$

5.3. Una generalización de la Distribución Binomial Multivariada correlacionada y la estimación de parámetros por Máxima Verosimilitud.

Aunque la distribución de la suma de dos variables Bernoulli derivada en la sección anterior es muy directa, la generalización a “ N ” variables presenta una serie de problemas técnicos bastante complicados de resolver. En particular, se sabe que no hay una solución única para obtener una fórmula general.⁵ Al parecer, la que tiene mayor aplicación práctica, es la que se presenta a continuación.⁶ Para esto, sean:

N_t = Número de créditos vigentes en la cartera en el periodo “ t ”; $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$

k_t = Número de créditos vigentes en “ $t-1$ ” que incumplen en el periodo t ; $t = 1, 2, 3, \dots, n$

⁵ Para una amplia discusión del tema, véase Farah, 2001.

⁶ JOE (1997).

r = Coeficiente de correlación entre cualquier pareja de variables Bernoulli.

p = Probabilidad de que cualquiera de las variables tome valor unitario.

Entonces, una función de probabilidad asociada a la suma de N_{t-1} variables aleatorias Bernoulli correlacionadas está dada por la siguiente expresión:

$$\Pr\{N^\circ \text{ de impagos} = k_t; p, \mathbf{r}\} = \binom{N_{t-1}}{k_t} \frac{\prod_{i=0}^{k_t-1} [p(1-\mathbf{r}) + i\mathbf{r}] \prod_{i=0}^{N_{t-1}-k_t-1} [(1-p)(1-\mathbf{r}) + i\mathbf{r}]}{\prod_{i=0}^{N_{t-1}-1} [(1-\mathbf{r}) + i\mathbf{r}]} \quad \forall t; \quad (5.18)$$

donde

$$0 \leq p \leq 1, \quad -1 \leq \mathbf{r} \leq 1,$$

bajo las siguientes restricciones,

$$p + (N_{t-1}-1) \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}} \geq 0 \quad \text{para } p \in [0, 0.5] \quad (5.19)$$

$$(1-p) + (N_{t-1}-1) \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}} \geq 0 \quad \text{para } p \in (0.5, 1] \quad (5.20)$$

Estas dos relaciones se resumen en:

$$\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}} \geq - \left(\frac{1}{N_{t-1}-1} \right) \min \{p, 1-p\} \quad (5.21)$$

En general, el número de créditos es grande, y la probabilidad de incumplimiento es pequeña, por lo cual se puede manejar sólo la restricción:

$$\frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}} \geq 0 \quad (5.22)$$

Pero esto equivale simplemente a: $0 \leq \mathbf{r} \leq 1$. Nótese que si $\mathbf{r} = 0$, el caso se reduce al de independencia.

Si se supone que los incumplimientos son independientes de un periodo a otro, el estimador de máxima verosimilitud de “ p ” y “ \mathbf{r} ” se obtiene al maximizar la siguiente expresión:

$$\max_{p, \mathbf{r}} \Pr\{k_1, k_2, \dots, k_n; p, \mathbf{r}\} = \max_{p, \mathbf{r}} \prod_{t=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{k_t-1} [p(l-\mathbf{r})+i\mathbf{r}] \prod_{i=0}^{N_{t-1}-k_t-1} [(l-p)(l-\mathbf{r})+i\mathbf{r}]}{\prod_{i=0}^{N_{t-1}-1} [(l-\mathbf{r})+i\mathbf{r}]} \quad (5.23)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 &\leq p \leq 1 \\ 0 &\leq \mathbf{r} \leq 1 \end{aligned}$$

La expresión anterior es altamente no-lineal y difícil de maximizar; sin embargo, la solución se facilita mediante algunas transformaciones. En primer término, nótese que el problema anterior es equivalente al siguiente:

$$\max_{p, \mathbf{g}} \Pr\{k_1, k_2, \dots, k_n | p, \mathbf{g}\} = \max_{p, \mathbf{g}} \prod_{t=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{k_t-1} [p+i\mathbf{g}] \prod_{i=0}^{N_{t-1}-k_t-1} [(1-p)+i\mathbf{g}]}{\prod_{i=0}^{N_{t-1}-1} [1+i\mathbf{g}]} \quad (5.24)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 &\leq p \leq 1 \\ \mathbf{g} &= \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}} \geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para propósitos de optimización, se puede simplificar aún más el problema. Dado que la función a maximizar es una función no negativa se pueden tomar logaritmos a la función objetivo, llegando finalmente al siguiente problema de optimización equivalente:

$$\max_{p, \mathbf{g}} \left\{ \log \Pr\{k_1, k_2, \dots, k_n | p, \mathbf{g}\} \right\} = \max_{p, \mathbf{g}} \sum_{t=1}^n \left[\sum_{i=0}^{k_t-1} \log(p+i\mathbf{g}) + \sum_{i=0}^{N_{t-1}-k_t-1} \log((1-p)+i\mathbf{g}) - \sum_{i=0}^{N_{t-1}-1} \log(1+i\mathbf{g}) \right]$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} 0 &\leq p \leq 1 \\ \mathbf{g} &= \frac{\mathbf{r}}{1-\mathbf{r}} \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, usando los datos reales sobre N_t y k_t , utilizando un algoritmo de optimización apropiado, se obtienen p^* , \mathbf{g}^* que resuelven el problema anterior, y $\mathbf{r}^* = \mathbf{g}^*/(1+\mathbf{g}^*)$.

5.4. Estimación mediante la aproximación Normal.

Una alternativa que vale la pena explorar, es la de utilizar una aproximación a la binomial mediante la distribución Normal. Para este propósito, recuérdese de (2.8) y (2.9) que la matriz de covarianzas asociada a cada periodo y cada segmento, tiene la forma:

$$\Sigma_t = p(1-p) [\mathbf{r} \mathbf{1}_t \mathbf{1}_t^T + (1-r) \mathbf{I}_t] \quad (5.25)$$

Nótese que en cada periodo cambia la dimensión de los vectores suma y la matriz identidad de la expresión anterior, ya que su dimensión corresponde al número de acreditados de acuerdo al periodo de incumplimiento.

Si se denota por \mathbf{K}_t al vector aleatorio que mide el número de incumplimientos simultáneos, donde cada componente está dada por una variable aleatoria Bernoulli, es decir,

$$K_i^t = \begin{cases} 1 & \text{con } p \\ 0 & \text{con } 1-p \end{cases}; i = 1, 2, \dots, N_{t-1} \quad (5.26)$$

El valor esperado del número total de incumplimientos está dado por:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_t^T \mathbf{K}_t) &= \mathbf{1}_t^T E(\mathbf{K}_t) \\ &= \mathbf{1}_t^T p \cdot \mathbf{1}_t \\ &= p \cdot \mathbf{1}_t^T \mathbf{1}_t \\ &= p \cdot N_{t-1} \end{aligned} \quad (5.27)$$

De la misma manera, se puede observar que la varianza del número total de incumplimientos está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_t^2 &= \text{Var}(\mathbf{1}_t^T \mathbf{K}_t) \\ &= \mathbf{1}_t^T \text{Var}(\mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{1}_t \\ &= \mathbf{1}_t^T p(1-p) \cdot [\mathbf{r} \mathbf{1}_t \mathbf{1}_t^T + (1-r) \mathbf{I}_t] \cdot \mathbf{1}_t \\ &= p(1-p) \cdot [\mathbf{r} \mathbf{1}_t^T \mathbf{1}_t \mathbf{1}_t^T \mathbf{1}_t + (1-r) \mathbf{1}_t^T \mathbf{1}_t] \\ &= p(1-p) \cdot [\mathbf{r} N_{t-1}^2 + (1-r) N_{t-1}] \\ &= N_{t-1} p(1-p) \cdot [\mathbf{r} (N_{t-1} - 1) + 1] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Dado que el número total de incumplimientos está representado por la suma de variables aleatorias, se puede utilizar una aproximación normal, para el número total de incumplimientos

$$f_t(k_t; p, \mathbf{r}, N_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{s}_t}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k_t - pN_{t-1}}{\mathbf{s}_t} \right)^2}$$

donde:

$$\mathbf{s}_t^2 = N_{t-1}p(1-p) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1].$$

Con el fin de garantizar la no negatividad de \mathbf{s}_t^2 , es necesario que

$$\mathbf{r} \geq \frac{-1}{N_{t-1} - 1}.$$

En general, el número de créditos es grande y se puede manejar sólo la restricción:

$$\mathbf{r} \geq 0.$$

Así, los estimadores de máxima verosimilitud para “ p ” y “ \mathbf{r} ” se obtienen resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{p, \mathbf{r}} \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{s}_t}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k_t - pN_{t-1}}{\mathbf{s}_t} \right)^2} \\ \text{s.a.} \\ 0 \leq p, \mathbf{r} \leq 1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Igual que en el caso de la binomial multivariada, la función objetivo se puede simplificar:

$$\prod_t f(k_t; p, \mathbf{r}, N_{t-1}) = \prod_t \frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{s}_t}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k_t - pN_{t-1}}{\mathbf{s}_t} \right)^2} = \frac{1}{(2p)^{\frac{n}{2}} \prod_t \mathbf{s}_t} e^{-\frac{1}{2} \sum_t \left(\frac{k_t - pN_{t-1}}{\mathbf{s}_t} \right)^2} \quad (5.30)$$

Tomando logaritmos y haciendo $\mathbf{p}_t = \frac{k_t}{N_{t-1}}$, se llega a la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned} \log \prod_t f(k_t; p, \mathbf{r}, N_{t-1}) = & -\frac{1}{2} \sum_t \frac{N_{t-1}(\mathbf{p}_t - p)^2}{p(1-p) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1]} - \frac{n}{2} \log(2p) \\ & - \frac{1}{2} \sum_t \log [N_{t-1} \cdot p(1-p) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1]] \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

5.5. Estimación por el Método de Momentos.

Una técnica utilizada en muchos casos, es la del método de los momentos en donde los momentos muestrales de una distribución, se igualan a los momentos poblacionales de la misma, con el fin de obtener un estimador de los parámetros asociados. El primer momento poblacional, \mathbf{g} , se define como valor esperado de una función continua de una variable aleatoria x , es decir,

$$\mathbf{g} = E[g(x)].$$

El tipo de momento más común es la media, \mathbf{m}' , en donde $g(\cdot)$ es simplemente la función identidad. Tradicionalmente, el método de momentos considera potencias de la variable K . La media \mathbf{m}' también es conocida como primer momento de la distribución, mientras que

$$\mathbf{m}'' = E(x^2)$$

es el segundo momento no centrado de la distribución. Nótese que los dos momentos anteriores nos permiten expresar la varianza de la variable aleatoria K como:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ &= \mathbf{m}'' - (\mathbf{m}')^2 \end{aligned}$$

Hasta aquí sólo se han descrito los momentos considerando las características de la población. Desde esta perspectiva, las definiciones anteriores son poco útiles. Es necesario, por lo tanto, definir las contrapartes muestrales de los momentos anteriores; esto es, los momentos muestrales para una variable aleatoria K . Estos se definen como:

$$\hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i); \quad \hat{\mathbf{m}}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \hat{\mathbf{m}}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Una vez definidos los momentos poblacionales y los momentos muestrales de la distribución de una variable aleatoria, se estima un momento poblacional (o una función de los momentos poblacionales), utilizando los momentos muestrales (o funciones de los momentos muestrales) correspondientes. En el caso que nos concierne, se utiliza la tasa de incumplimiento, \mathbf{p}_t , como variable aleatoria, es decir,

$$\mathbf{p}_t = \frac{k_t}{N_{t-1}} \tag{5.32}$$

Dado que el número total de acreditados es conocido, el valor esperado de (5.32) está dado por

$$E(\mathbf{p}_t) = E\left(\frac{k_t}{N_{t-1}}\right) = \frac{1}{N_{t-1}} E(k_t) = \frac{1}{N_{t-1}} \cdot N_{t-1} \cdot p = p.$$

Entonces, suponiendo que todos los créditos de la cartera tienen la misma probabilidad de incumplimiento “ p ” y que son independientes, el estimador por el método de momentos está dado por:

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{k_t}{N_{t-1}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{p}_t \quad (5.33)$$

Ahora bien, de (5.28) se sabe que

$$\text{Var}(k_t) = N_{t-1} p(1-p) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1]$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_t) &= \text{Var}\left(\frac{k_t}{N_{t-1}}\right) \\ &= \frac{1}{N_{t-1}^2} \cdot \text{Var}(k_t) \\ &= \frac{p(1-p) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1]}{N_{t-1}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Por otro lado, se sabe que

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{p}_{t-i+1} - \hat{p})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{p}_{t-i+1} - \hat{p})^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p}) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1]}{N_{t-1}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Al aplicar el método de momentos sobre (5.35), de (5.33) y (5.34) se obtiene,

$$S_p^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p}) \cdot [\mathbf{r}(N_{t-1} - 1) + 1]}{N_{t-1}} \quad (5.36)$$

De donde se tiene que

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{I}{(N_{t-1} - I)} \left[\frac{N_{t-1} \cdot S_p^2}{\hat{p} \cdot (I - \hat{p})} - I \right].$$

Se sugiere utilizar $\bar{N} = \frac{I}{n} \sum_{i=1}^n N_{t-i}$ en lugar de N_{t-1} , con el fin de eliminar el efecto de la observación al último periodo. Entonces, el estimador para \mathbf{r} está dado por

$$\hat{r} = \frac{1}{(\bar{N} - 1)} \left[\frac{\bar{N} \cdot S_p^2}{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})} - 1 \right] \quad (5.37)$$

5.6. Implementación: Comparación de métodos de estimación.

En la sección anterior se expuso la teoría relativa a las probabilidades de incumplimiento así como la correlación y algunos estimadores encontrados para su estimación. En esta sección se presenta un comparativo de las estimaciones obtenidas a partir de los métodos de estimación enunciados.

5.6.1. Resultados.

Para la estimación de las probabilidades de incumplimiento y coeficientes de correlación se utilizaron las tasas de incumplimiento históricas según se observan en la base de datos de la Relación de Responsabilidades, que las Instituciones Financieras están obligadas a entregar mensualmente al Banco de México, con una ventana móvil de 12 meses; es decir, se supone que la probabilidad de incumplimiento es la misma durante cada periodo de doce meses.⁷ Los gráficos 5.1 y 5.2 presentan las estimaciones de la probabilidad de incumplimiento, hechas por los diferentes métodos aquí presentados. Puede observarse que la probabilidad estimada por el método de máxima verosimilitud suponiendo independencia (Binomial simple), sobreestima en todos los casos, debiéndose básicamente, a que la tasa de incumplimiento observada debe quedar completamente explicada por la probabilidad de incumplimiento, en ausencia de correlación.

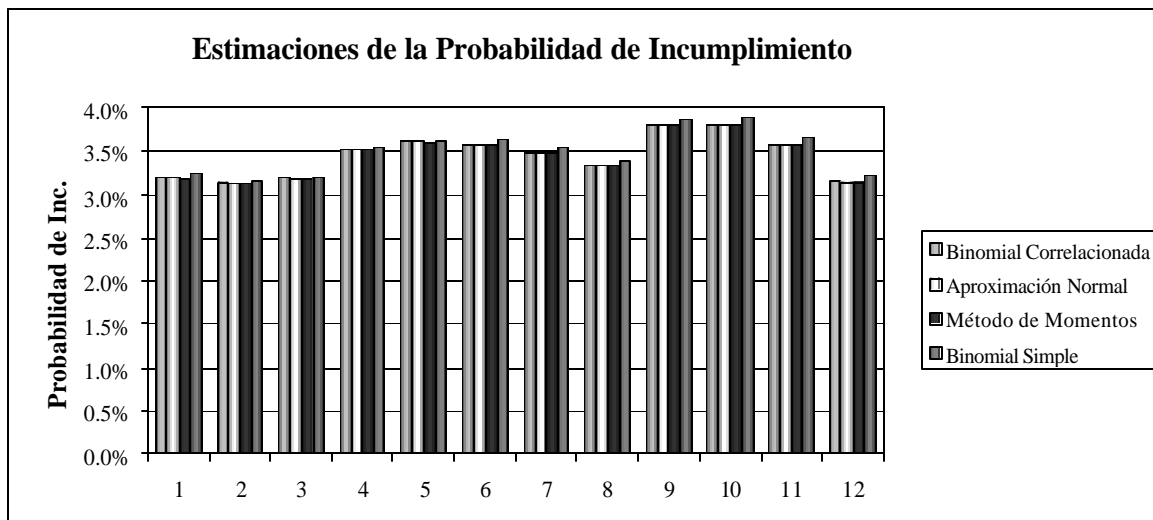


Gráfico 5.1. Comparativo entre las estimaciones de la Probabilidad de Incumplimiento.

⁷ Cabe destacar que sólo se utilizaron los créditos relacionados con banca múltiple, por lo que no se utilizó la información relacionada con arrendadoras financieras, empresas de factoraje y la Banca de desarrollo.

El gráfico 5.2 muestra un comparativo entre los coeficientes de correlación estimados por los distintos métodos enunciados. Puede observarse que los coeficientes de correlación muestran la misma tendencia para todas las estimaciones en estudio.

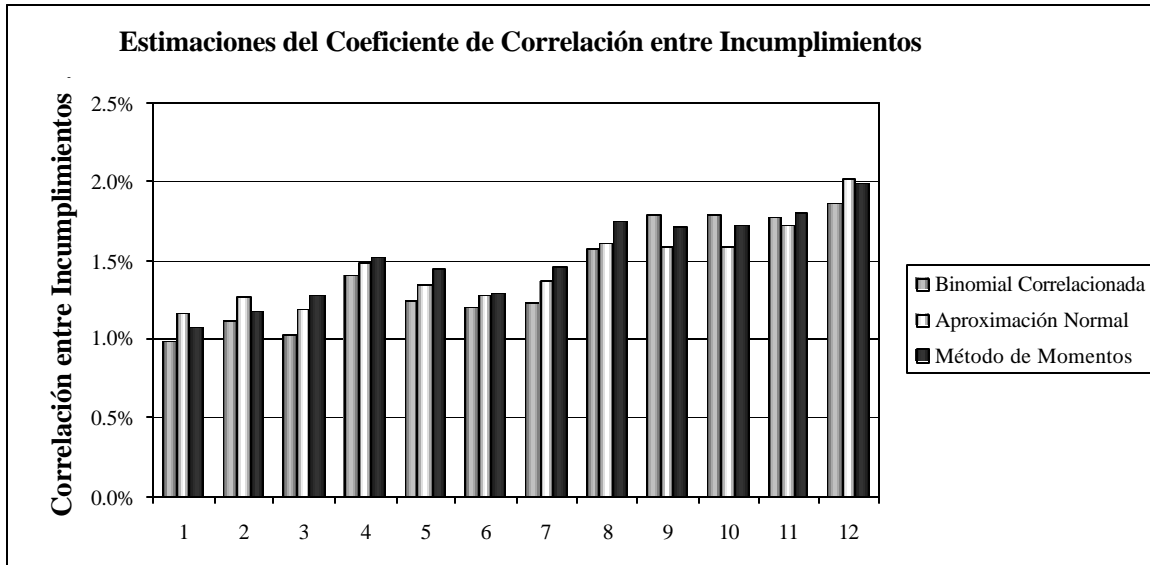


Gráfico 5.2. Comparativo de las Correlaciones entre Incumplimientos.

El siguiente cuadro representa los resultados para las aproximaciones de incumplimiento obtenidos a partir de los métodos de estimación antes enunciados.

Tiempo	Aproximación Simple	Aproximación Correlacionada	Aproximación Normal	Método de Momentos
1	0.032421	0.031979	0.031919	0.031832
2	0.031655	0.031357	0.031317	0.031264
3	0.031942	0.031908	0.031882	0.031870
4	0.035464	0.035209	0.035181	0.035148
5	0.036224	0.036130	0.036102	0.036089
6	0.036351	0.035841	0.035785	0.035735
7	0.035370	0.034907	0.034848	0.034803
8	0.033821	0.033404	0.033366	0.033339
9	0.038761	0.038111	0.038128	0.038072
10	0.038781	0.038123	0.038140	0.038083
11	0.036486	0.035864	0.035838	0.035792
12	0.032280	0.031554	0.031483	0.031442

Cuadro 5.1.

De la misma manera se presentan las estimaciones para el coeficiente de correlación entre los incumplimientos.

Tiempo	Binomial Correlacionada	Aproximación Normal	Método de Momentos
1	0.009801	0.011683	0.010725
2	0.011145	0.012669	0.011772
3	0.010311	0.011829	0.012740
4	0.014000	0.014843	0.015135
5	0.012413	0.013437	0.014547
6	0.011955	0.012793	0.012882
7	0.012342	0.013665	0.014567
8	0.015725	0.016083	0.017466
9	0.017976	0.015827	0.017162
10	0.017964	0.015811	0.017235
11	0.017641	0.017268	0.018029
12	0.018623	0.020200	0.019812

Cuadro 5.2.

Nótese que cualquiera de los tres métodos arroja resultados de órdenes de magnitud muy parecidos. Evidentemente, el más sencillo es el de momentos ya que no requiere ningún procedimiento de optimización. De los otros dos métodos, es importante mencionar que la estimación a través de la aproximación normal es difícil de obtener, debido a que la función de densidad asociada se indetermina en la frontera de las restricciones de los parámetros.

6. Completando La Matriz de Covarianzas.

En la sección quinta anterior, se abordó el problema de estimación de probabilidades de incumplimiento y correlaciones idiosincráticas de cada segmento de la cartera. Para completar el cuadro, solo resta estimar la correlación entre incumplimientos de créditos de diferentes segmentos. Esto permite estimar los elementos de las submatrices C_{ij} que contienen las covarianzas entre los incumplimientos de los créditos del grupo “i” y las del grupo “j”. El supuesto básico en este caso, es que el coeficiente de correlación r_{ij} es igual para cualquier pareja de créditos de dos segmentos distintos. De la relación (4.2) de la cuarta sección, recuérdese que:

$$C_{ij} = \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j \begin{pmatrix} r_{ij} & \cdots & r_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ij} & \cdots & r_{ij} \end{pmatrix} = \sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_j(1-p_j)} r_{ij} (\mathbf{1}_i \mathbf{1}_j^T) \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{1}_i$ y $\mathbf{1}_j$ representan a los vectores suma de dimensión N_i y N_j respectivamente.

Para propósitos de estimación, dado que las probabilidades de incumplimiento se estiman en términos idiosincráticos por alguna de las técnicas descritas en la sección anterior, solo se requiere estimar las correlaciones entre incumplimientos de deudores de diferentes segmentos. Además, esto es conveniente por otras razones; a saber: Primero por razones de estabilidad numérica, pues las correlaciones están restringidas al intervalo $[-1, 1]$, lo cual permite la obtención de cifras con una mejor precisión, además de que en general resultan más estables que las covarianzas. Un segundo beneficio es que, al estar normalizadas, ofrecen resultados comparables. La última razón, es que se reduce el número de parámetros a estimar, así como los grados de libertad para consideraciones de pruebas de hipótesis ya que los elementos de la diagonal siempre son 1. En realidad, el proceso de estimación de las correlaciones r_{ij} va más de acuerdo a lo que se acostumbra ver en los libros de texto.

6.1. El Coeficiente de Correlación

Una medida estándar de dependencia entre dos variables, digamos X y Y , es el momento m_{11} , conocido como la covarianza de X y Y , definida como:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= m_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) dF(x, y) \\ &= E\{(x - m_x)(y - m_y)\} \\ &= E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

En términos llanos, puede decirse que la covarianza representa un promedio ponderado de las medias condicionales, medido sobre la media incondicional; esto puede verse expresando m_{11} como

$$m_{11} = E_x \{ X [E\{Y|X\} - E\{Y\}] \} \quad (6.3)$$

A pesar de que la covarianza es una forma natural de medir relaciones, es conveniente contar con una medida que sea invariante ante cambios de escala o posición. Para ello, se define el *Coeficiente de correlación* como

$$r_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}} \quad (6.4)$$

Geométricamente, se puede pensar en el coeficiente de correlación como una medida de ortogonalidad. Para ello, considérese un espacio real con el siguiente producto interno:

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \iint_V \vec{x} \cdot \vec{y} dF(\vec{x}, \vec{y}) = E\{\vec{X} \cdot \vec{Y}\}$$

Entonces, si los vectores X y Y se miden en torno a sus respectivas medias, la covarianza queda representada por el producto interno de estos dos vectores, mientras que la correlación entre ellos no es más que el producto interno de los vectores normalizados. Formalmente, lo anterior se expresa de la manera siguiente:

$$r_{xy} = \left\langle \frac{x - \mathbf{m}_x}{\|x - \mathbf{m}_x\|}, \frac{y - \mathbf{m}_y}{\|y - \mathbf{m}_y\|} \right\rangle \quad (6.5)$$

$$= \frac{\langle x - \mathbf{m}_x, y - \mathbf{m}_y \rangle}{\|x - \mathbf{m}_x\| \|y - \mathbf{m}_y\|}$$

Para ver que (6.4) y (6.5) tienen la misma forma funcional, recuérdese que la norma de un vector es la raíz cuadrada del producto interno de éste consigo mismo. Recordando que en espacio Euclidiano (6.5) representa el coseno del ángulo entre dos vectores, se verifica que la medida está restringida al intervalo $[-1, 1]$ y que además, da una interpretación geométrica de la independencia entre dos vectores. Aquí cabe mencionar que, aunque dos vectores son ortogonales (independientes) si y sólo si su producto interno es cero, en el terreno de la probabilidad el tener un producto interno (covarianza) de cero no necesariamente implica la ortogonalidad de los vectores, mientras que la ortogonalidad de éstos conlleva a un producto interno igual a cero.

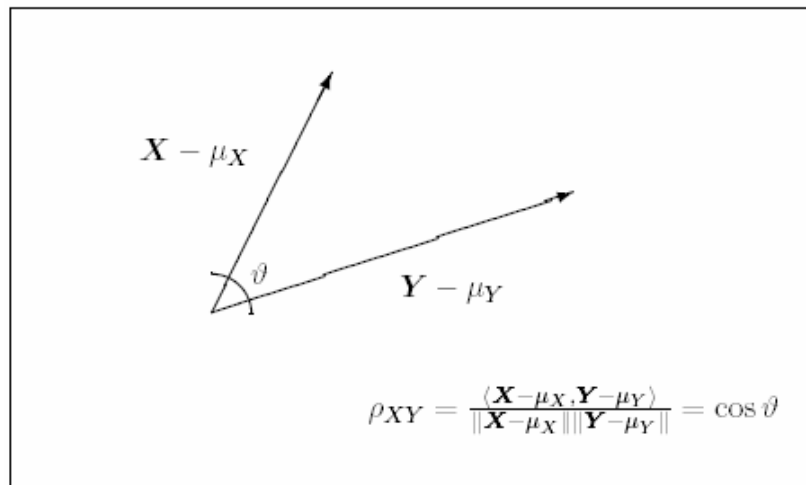


Figura 1: Geometría de la Correlación

Hay dos consideraciones que resultan fundamentales en el estudio del coeficiente de correlación (6.5): la primera es que éste es un coeficiente de *interdependencia lineal*. En general, la variación conjunta es demasiado compleja como para ser resumida en un solo número. El segundo aspecto es que el uso de r como medida de interdependencia es conveniente *sólo en el caso de variación normal o casi normal*.

6.2. Estimadores de r .

Una vez estudiado al coeficiente de correlación (6.5) es necesario atender el problema de cómo se puede estimar. En los incisos siguientes se discuten diferentes técnicas de estimación a partir de una muestra dada.

6.2.1. Correlación por Producto de Momentos.

Una primera aproximación en la estimación de la expresión (6.5) es estimar cada uno de los momentos por separado y, posteriormente, inferir a partir de ellos la correlación muestral. Tendremos entonces:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{r}_{ij} &= \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}} \\
 &= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}} \\
 &= \frac{\sum X_i Y_j - n \bar{X} \bar{Y}}{\sqrt{(\sum X_i^2 - n \bar{X}^2)(\sum Y_i^2 - n \bar{Y}^2)}}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Aunque a primera vista parece una estimación de tipo heurístico, puede mostrarse que en el caso de una muestra *binormal*, (6.6) es el estimador de máxima verosimilitud de \mathbf{r} . Este hecho permite el uso de (6.6) como estimador de la correlación en la mayoría de los casos prácticos, sobre todo cuando se cuenta con una muestra suficientemente grande.

6.2.2. Correlación de Daniels.

El estimador de Daniels es una generalización de la fórmula (6.6). Dicho estimador se utiliza cuando se desea probar independencia entre las series observadas; su expresión es la siguiente:

$$\mathbf{r}_D = \frac{\sum_{(2)} a_{ij} b_{ij}}{(\sum_{(2)} a_{ij}^2 \sum_{(2)} b_{ij}^2)^{1/2}} \quad (6.7)$$

En esta expresión, $\sum_{(2)}$ denota $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$ y a_{ij}, b_{ij} dependen de (x_i, x_j) y (y_i, y_j) , respectivamente. Como podrá verse, (6.6) es un caso particular de (6.7) que tiene la ventaja de que (a_{ij}, b_{ij}) no tiene que restringirse a una función sobre los valores de la series, sino que admite, por ejemplo, medidas basadas en rangos. Esto le da una gran versatilidad ya que la definición tanto de a_{ij} como de b_{ij} permite controlar el patrón de dependencia que se desea detectar.

6.3. Estimación de la matriz C_{ij} .

Hasta el momento se ha discutido de manera teórica la estimación de la correlación entre dos variables aleatorias. Como se comentó al inicio de la sección, nuestro interés es obtener la interacción de un conjunto de variables aleatorias, en particular, de incumplimientos de deudores, a través de la matriz de correlaciones. En el modelo de riesgo crédito desarrollado, por la estructura tan particular que presenta, se ha visto que la matriz de covarianzas segmentada tiene la forma representada en (3.0), y solo queda estimar las submatrices C_{ij} que tienen la forma expresada en (6.1). Como puede verse en (6.7), el

problema de estimación de la matriz se resume a un problema de estimar $\frac{h(h-1)}{2}$ correlaciones a pares, pues las correlaciones asociadas a las matrices de varianzas y covarianzas intrínsecas se estiman de acuerdo a la sección precedente.

Al tomar la misma muestra en todas las estimaciones se asegura que la matriz resultante sea positiva definida. Así, el estimador de cada submatriz C_{ij} de correlaciones queda dado por la siguiente expresión:

$$\hat{C}_{ij} = \hat{r}_{ij} \cdot \sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)} \cdot \mathbf{1}_{N_i} \mathbf{1}_{N_j}^T, \quad (6.8)$$

donde

\hat{p}_i = probabilidad de incumplimiento del grupo i .

\hat{p}_j = probabilidad de incumplimiento del grupo j .

6.3.1. Estimación.

En la implantación del modelo, hasta el momento la estimación de la correlación se hace con una ventana móvil de t periodos. Con esto, el estimador (6.7) queda en los siguientes términos:

$$\hat{r}_{ij,t}^{(t)} = \frac{\sum_{k=0}^{t-1} X_{i,t-k} X_{j,t-k} - t \bar{X}_{i,t}^{(t)} \bar{X}_{j,t}^{(t)}}{\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{t-1} X_{i,t-k}^2 - t \bar{X}_{i,t}^{(t)2} \right) \left(\sum_{k=0}^{t-1} X_{j,t-k}^2 - t \bar{X}_{j,t}^{(t)2} \right)}} \quad (6.9)$$

en donde

$$\bar{X}_{i,t}^{(t)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} X_{i,t-k}$$

6.3.2. Resultados.

Los datos utilizados son las tasas de incumplimiento históricamente observadas, asociadas a los diferentes segmentos en los que se dividió la cartera. Se obtienen de la Relación de Responsabilidades, y son las mismas que se utilizan para obtener las probabilidades de incumplimiento y las correlaciones idiosincráticas de la sección cinco.

Actualmente, por un acuerdo institucional, el criterio principal de segmentación es por banco y por actividad económica de los deudores. Así, por cada banco se segmenta la cartera de créditos en 22 grupos según se muestra en el cuadro 6.1. Los resultados presentados se obtuvieron aplicando la expresión (6.9) con una ventana móvil de $t=12$ meses.

Cuadro 6.1: Segmentación de la cartera por Actividad Económica

Grupo	Descripción
000	Bancos en Situación Especial
A	Agricultura
B	Ganadería, Silvicultura, Pesca y Caza
C	Industria Extractiva
D	Industria de Alimentos
E	Industria Textil
F	Industria de Madera y Papel
G	Industria Química
H	Minerales No Metálicos y Plásticos
I	Metales Básicos y Productos Metálicos
J	Maquinaria y Equipo
K	Otras Industrias
L	Construcción
M	Comercio Productos Terminados
N	Comercio Materias Primas y Maquinaria
O	Vivienda, Tarjetas de Crédito y Otros Com.
P	Comunicaciones y Transportes
Q	Servicios Financieros
R	Servicios Profesionales, Técnicos y Personales
S	Servicios Recreativos
T	Servicios sociales y Comunes
Otr	Otros

Como se señaló anteriormente, el coeficiente de correlación nos proporciona una medida de interdependencia razonable en la medida en que la muestra provenga de una población normal o casi normal. Naturalmente, los datos empleados para nuestro análisis muestran una desviación de la normalidad al estar confinados al intervalo [0, 1]. Para superar este problema técnico, se probó la transformación de tipo logístico sobre las series definida por

$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (6.10)$$

donde y es la serie observada. Despejando “ x ” de esta relación, se obtiene:

$$x = \log\left(\frac{y}{1 - y}\right) \quad (6.11)$$

Con esto, la variable ya queda definida sobre el intervalo [-8,8], lo cual es un elemento deseable en las pruebas de normalidad. Al aplicar la prueba de Lilliefors⁸ para determinar la normalidad de la serie se obtuvieron los resultados presentados en el cuadro 6.2 . Los resultados sugieren que, al transformar las series, el supuesto de normalidad se cumple y, por lo tanto, las estimaciones de correlaciones así obtenidas son más robustas.

⁸ Referencia?

Cuadro 6.2.

Grupo	Obs.	Estadístico	Valor crítico	Rechazar
Bancos en Situación Especial	59	0.12027	0.11535	Sí
Agricultura	59	0.10353	0.11535	
Ganadería, Silvicultura, Pesca y Caza	58	0.06711	0.11634	
Industria Extractiva	52	0.14945	0.12287	Sí
Industria de Alimentos	59	0.10240	0.11535	
Industria Textil	59	0.11666	0.11535	Sí
Industria de Madera y Papel	59	0.11225	0.11535	
Industria Química	55	0.08158	0.11947	
Minerales No Metálicos y Plásticos	58	0.10295	0.11634	
Metales Básicos y Productos Metálicos	59	0.09937	0.11535	
Maquinaria y Equipo	59	0.06240	0.11535	
Otras Industrias	59	0.07821	0.11535	
Construcción	59	0.14892	0.11535	Sí
Comercio Productos Terminados	59	0.12292	0.11535	Sí
Comercio Materias Primas y Maquinaria	59	0.16138	0.11535	Sí
Vivienda, Tarjetas de Crédito y Otros Com.	59	0.11282	0.11535	
Comunicaciones y Transportes	58	0.09881	0.11634	
Servicios Financieros	58	0.07227	0.11634	
Servicios Profesionales, Técnicos y Personales	59	0.11434	0.11535	
Servicios Recreativos	58	0.12503	0.11634	Sí
Servicios sociales y Comunales	58	0.08051	0.11634	
Otros	21	0.14249	0.18660	

7. Un esquema de estimación generalizado

En la sección 5 se abordó el problema de estimar tanto las probabilidades de incumplimiento como las correlaciones idiosincráticas, aprovechando la estructura de la matriz de varianzas-covarianzas propuesta en (3.0). Este esquema de estimación dejó de lado el problema de estimar las matrices C_{ij} , mismo que fue tratado en la sección anterior. Como puede apreciarse, la estimación de los factores de riesgo en dos etapas representa la ventaja de simplificar la obtención de los distintos estimadores, contando con formas cerradas o, en el peor de los casos, con funciones que permiten la estimación numérica al resolver un problema de optimización. No obstante el punto anterior, es deseable contar con estimadores conjuntos que capturen las relaciones subyacentes entre probabilidades, correlaciones idiosincráticas y correlaciones entre incumplimientos de distintos segmentos. En esta sección se presenta un método que permite estimar conjuntamente los factores de riesgo utilizados en un modelo de incumplimiento como CyRCE.

7.1 Varianzas de Incumplimientos

En la introducción anterior se comentó que los distintos métodos de estimación para las probabilidades y correlaciones de incumplimiento propuestos en el presente documento

aprovechan en mayor o menor grado la estructura de la matriz de covarianzas entre incumplimientos del portafolio presentada en (3.0). Para nuestros propósitos, tomaremos nuevamente como punto de partida dicha expresión. Recordemos que la matriz de covarianzas \mathbf{M} puede descomponerse como la suma de tantas matrices \mathbf{S}_i como segmentos tenga el portafolio; además, cada matriz \mathbf{S}_i asociada al i -ésimo segmento toma en cuenta únicamente las correlaciones que afectan directamente a los créditos que pertenecen al segmento e ignora los demás efectos. Así, tomando la expresión para \mathbf{S}_i dada en (3.1) y las expresiones para \mathbf{M}_i y \mathbf{C}_{ij} dadas en (4.1) y (4.2), respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^T \mathbf{S}_i \mathbf{1} &= \frac{1}{2} \left[2\mathbf{1}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{1}_i + 2 \sum_{j \neq i} \mathbf{1}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{1}_j \right] \\ &= p_i(1-p_i) \mathbf{1}_i^T \left[\mathbf{r}_i \mathbf{1}_i \mathbf{1}_i^T + (1-\mathbf{r}_i) \mathbf{I}_i \right] \mathbf{1}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_{ij} \sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)} \mathbf{1}_i^T (\mathbf{1}_i \mathbf{1}_i^T) \mathbf{1}_j \\ &= p_i(1-p_i) \left[n_i^2 \mathbf{r}_i + (1-\mathbf{r}_i)n_i \right] + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_{ij} \sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)} n_i n_j\end{aligned}$$

Simplificando, llegamos a la siguiente expresión para la varianza de incumplimientos de un sector individual:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{S}_i \mathbf{1} = \mathbf{s}_i n_i \left\{ \mathbf{s}_i [\mathbf{r}_i (n_i - 1) + 1] + \sum_{j \neq i} \mathbf{s}_j n_j \mathbf{r}_{ij} \right\} \quad (7.1)$$

donde

$$\mathbf{s}_i = \sqrt{p_i(1-p_i)}$$

Puede verse en (7.1) que la varianza de incumplimientos depende de los tres factores de riesgo que afectan al modelo, a saber: probabilidades, correlaciones idiosincráticas y correlaciones entre distintos segmentos. De este modo, al resolver la varianza (7.1) obtendremos simultáneamente valores para p_i , \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_{ij} . El primer inconveniente que surge de este esquema es que se tienen h ecuaciones con $\frac{h(h+3)}{2}$ incógnitas, lo cual nos deja $\frac{h(h+1)}{2}$ grados de libertad. El segundo inconveniente es la heterogeneidad en el tamaño de los segmentos. En términos más claros, el tener segmentos de diferente tamaño implica que la confianza en las estimaciones para cada uno de éstos será desigual; esto dificulta la estimación de forma conjunta ya que habrá casos en que el portafolio no proporcione suficiente información como para tener una estimación confiable. El caso más sencillo en este tenor es tener un segmento con un solo crédito; con una muestra tan pequeña la probabilidad de incumplimiento inferida será cero mientras el acreditado se mantenga al corriente en sus pagos pero, al momento de incumplir, el parámetro inferido sería de uno. Obviamente, en ninguno de los dos casos la inferencia estadística es acertada debido al tamaño de la muestra observada. Por otro lado, respecto a la administración del portafolio, la estimación no estaría cumpliendo con el objetivo de permitir un aprovisionamiento adecuado de las potenciales pérdidas del acreditado.

Para reducir el efecto de estas complicaciones, en lugar de buscar una solución exacta a la varianza de incumplimientos, es preferible resolver de forma numérica alguna función de esta última. Una función objetivo que resulta atractiva en esta caso es:

$$\sum_{i=1}^h w_i \left\{ \left(\frac{\mathbf{1}^T \mathbf{S}_i \mathbf{1} - \hat{\mathbf{S}}_i^2}{n_i^2} \right)^2 + (p_i - \hat{p}_i)^2 \right\} \quad (7.2)$$

donde $\hat{\mathbf{S}}_i^2$ es la varianza de incumplimientos observada en el portafolio para cada uno de los segmentos en un periodo de tiempo dado, mientras que \hat{p}_i es la probabilidad de incumplimiento del segmento inferida de acuerdo con alguno de los métodos presentados en la sección quinta anterior. De la expresión (7.2) destacan dos elementos: el primero es el denominador n_i^2 , que permite dejar los argumentos de la función objetivo con términos adimensionales comparables. La ventaja de tener una función objetivo adimensional es que tanto la probabilidad como la varianza de incumplimientos reciben la misma oportunidad para reducir su error cuadrático, de otro modo, la optimización trataría de ajustar lo mejor posible la parte de la varianza, aun cuando tuviera que penalizar la probabilidad asociada. Este no es, evidentemente, un aspecto deseable pues el modelo estaría sobreestimando la probabilidad de incumplimiento y exigiría un aprovisionamiento del portafolio superior al necesario. El segundo elemento a destacar es la presencia del factor w_i , en realidad este debiera de leerse como $\omega(n_i)$, es decir, ω representa una función $\omega: \mathbf{N} \rightarrow [0,1]$ que asigna un peso a cada término de la función objetivo de acuerdo con el tamaño del segmento en cuestión. Con ello, los segmentos que contengan pocos créditos recibirán un peso menor y, por tanto, la optimización atenderá con mayor relevancia los segmentos que tengan mejor información.

Con relación a ω , ésta debe de tener las siguientes propiedades:

$$w' > 0, \quad w'' < 0 \quad (7.3)$$

Estas condiciones son bastante razonables si se considera que, entre mayor sea el tamaño del segmento, mayor importancia deberá de tener la estimación de sus parámetros. Por otro lado, entre mayor sea el tamaño del segmento, la información que aporte un acreditado tenderá a ser menor. Teniendo en cuenta lo anterior, se eligió a ω como:

$$w(n_i) = \frac{n_i}{\sum_{k=1}^h n_k} \quad (7.4)$$

Finalmente, para mantener la probabilidad de incumplimiento en niveles razonables con relación a la tasa de incumplimiento observada, su dominio se restringió de modo que represente un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$.

Apéndice “A”

Tabla A.1. M_1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.0162	0.0050	0.0050	0.0060	0.0060	0.0082	0.0082	0.0105
2	0.0050	0.0475	0.0086	0.0103	0.0103	0.0140	0.0140	0.0180
3	0.0050	0.0086	0.0475	0.0103	0.0103	0.0140	0.0140	0.0180
4	0.0060	0.0103	0.0103	0.0694	0.0125	0.0169	0.0169	0.0217
5	0.0060	0.0103	0.0103	0.0125	0.0694	0.0169	0.0169	0.0217
6	0.0082	0.0140	0.0140	0.0169	0.0169	0.1275	0.0230	0.0295
7	0.0082	0.0140	0.0140	0.0169	0.0169	0.0230	0.1275	0.0295
8	0.0105	0.0180	0.0180	0.0217	0.0217	0.0295	0.0295	0.2100

Tabla A.2: $C_{12}^T = C_{21}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
9	0.0063	0.0108	0.0108	0.0130	0.0130	0.0177	0.0177	0.0227
10	0.0081	0.0138	0.0138	0.0166	0.0166	0.0226	0.0226	0.0290
11	0.0081	0.0138	0.0138	0.0166	0.0166	0.0226	0.0226	0.0290
12	0.0111	0.0190	0.0190	0.0229	0.0229	0.0311	0.0311	0.0399
13	0.0111	0.0190	0.0190	0.0229	0.0229	0.0311	0.0311	0.0399
14	0.0132	0.0226	0.0226	0.0273	0.0273	0.0370	0.0370	0.0475
15	0.0169	0.0290	0.0290	0.0350	0.0350	0.0475	0.0475	0.0609
16	0.0169	0.0290	0.0290	0.0350	0.0350	0.0475	0.0475	0.0609

Tabla A.3: $C_{13}^T = C_{31}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
17	0.0039	0.0067	0.0067	0.0081	0.0081	0.0109	0.0109	0.0140
18	0.0052	0.0089	0.0089	0.0108	0.0108	0.0146	0.0146	0.0188
19	0.0067	0.0114	0.0114	0.0138	0.0138	0.0187	0.0187	0.0240
20	0.0081	0.0138	0.0138	0.0167	0.0167	0.0226	0.0226	0.0290
21	0.0092	0.0157	0.0157	0.0190	0.0190	0.0257	0.0257	0.0330
22	0.0109	0.0187	0.0187	0.0226	0.0226	0.0306	0.0306	0.0393
23	0.0140	0.0240	0.0240	0.0290	0.0290	0.0393	0.0393	0.0504
24	0.0140	0.0240	0.0240	0.0290	0.0290	0.0393	0.0393	0.0504
25	0.0140	0.0240	0.0240	0.0290	0.0290	0.0393	0.0393	0.0504

Tabla A.4: M_2

	9	10	11	12	13	14	15	16
9	0.0291	0.0086	0.0086	0.0118	0.0118	0.0140	0.0180	0.0180
10	0.0086	0.0475	0.0109	0.0150	0.0150	0.0179	0.0230	0.0230
11	0.0086	0.0109	0.0475	0.0150	0.0150	0.0179	0.0230	0.0230
12	0.0118	0.0150	0.0150	0.0900	0.0207	0.0246	0.0316	0.0316
13	0.0118	0.0150	0.0150	0.0207	0.0900	0.0246	0.0316	0.0316
14	0.0140	0.0179	0.0179	0.0246	0.0246	0.1275	0.0376	0.0376
15	0.0180	0.0230	0.0230	0.0316	0.0316	0.0376	0.2100	0.0483
16	0.0180	0.0230	0.0230	0.0316	0.0316	0.0376	0.0483	0.2100

Tabla A.5: $C_{32}^T = C_{23}$

	17	18	19	20	21	22	23	24	25
9	0.0070	0.0093	0.0119	0.0144	0.0164	0.0195	0.0250	0.0250	0.0250
10	0.0089	0.0119	0.0152	0.0184	0.0209	0.0249	0.0320	0.0320	0.0320
11	0.0089	0.0119	0.0152	0.0184	0.0209	0.0249	0.0320	0.0320	0.0320
12	0.0122	0.0164	0.0209	0.0253	0.0288	0.0343	0.0440	0.0440	0.0440
13	0.0122	0.0164	0.0209	0.0253	0.0288	0.0343	0.0440	0.0440	0.0440
14	0.0146	0.0195	0.0249	0.0301	0.0343	0.0408	0.0524	0.0524	0.0524
15	0.0187	0.0250	0.0320	0.0386	0.0440	0.0524	0.0672	0.0672	0.0672
16	0.0187	0.0250	0.0320	0.0386	0.0440	0.0524	0.0672	0.0672	0.0672

Tabla A.6: M_3

	17	18	19	20	21	22	23	24	25
17	0.0162	0.0093	0.0119	0.0144	0.0164	0.0196	0.0251	0.0251	0.0251
18	0.0093	0.0291	0.0160	0.0193	0.0220	0.0262	0.0336	0.0336	0.0336
19	0.0119	0.0160	0.0475	0.0247	0.0281	0.0335	0.0429	0.0429	0.0429
20	0.0144	0.0193	0.0247	0.0694	0.0340	0.0404	0.0519	0.0519	0.0519
21	0.0164	0.0220	0.0281	0.0340	0.0900	0.0461	0.0591	0.0591	0.0591
22	0.0196	0.0262	0.0335	0.0404	0.0461	0.1275	0.0704	0.0704	0.0704
23	0.0251	0.0336	0.0429	0.0519	0.0591	0.0704	0.2100	0.0903	0.0903
24	0.0251	0.0336	0.0429	0.0519	0.0591	0.0704	0.0903	0.2100	0.0903
25	0.0251	0.0336	0.0429	0.0519	0.0591	0.0704	0.0903	0.0903	0.2100

REFERENCIAS.

Adelman, M. A. 1969. *Comment on the "H" Concentration Measure as a Numbers-Equivalent*. *Review of Economics and Statistics*, Febrero, pp. 99-101.

Altman Edward I., y Anthony Saunders 1998. *Credit risk measurement: Development over the last 20 years*. *Journal of Banking & Finance* 21 (1998) 1721-1742.

Crouhy, Michel, Dan Galai y Robert Mark: A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance* 24 (2000) pp. 59-117.

Basle Committee on Banking Supervision, 1999. *Credit Risk Modeling: Current Practices and Applications*.

Bennet, P. 1984. *Applying Portfolio Theory to Global Bank Lending*. *Journal of Banking and Finance*.

Caouette, John B., Edward I. Altman y Paul Narayanan 1998. *Managing Credit Risk: The next great challenge*. Ed. John Wiley & Sons, Inc.

Coopers and Lybrand. 1993. *Growth and Diversification: Are the Benefits Always There?* In *Mortgage Banking*, editado por J. Lederman. Chicago: Probus Publishing Company.

Cossin, Didier y Hugues Pirotte: *Advanced Credit Risk Analysis. Financial Approaches and Mathematical Models to Assess, Price, and Manage Credit Risk*. Ed. John Wiley & Sons, Ltd. 2001.

Cowell, Frank A., *Measuring Inequality 2nd edition*. LSE Handbooks in Economics, Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf, 1995.

Credit Risk + : Credit Suisse Financial Products, New York, N.Y. 1996.

CreditMetrics™: Technical document, Abril 2, 1997.

De Groot, Morris H., *Probabilidad y Estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington Delaware. 1988.

Encaoua, David y Jacquemin, Alexis. 1980. *Degree of monopoly, indices of concentration and threat of entry*. *International Economic Review* 21.

Finger, Christopher C.: *Sticks and Stones*, The RiskMetrics Group. 1998

Gordy, Michael B. *A comparative Anatomy of Credit Risk Models*. *Journal of Banking and Finance*, vol 24, 2000, pp. 119-149.

Graybill, Franklin A. *An introduction to Linear Statistical Models*. McGraw-Hill: New York. 1961.

Joe, Harry. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall: Monographs on Statistics and Applied Probability. 1997.

Kealhofer, S. Portfolio Management of Default Risk. KMV Corporation, 1998.(Revised.)

- Kealhofer, S. Modeling Default Risk. KMV Corporation, 1999 (Revised.)
- Kelly Jr. W.A. 1981. *A Generalized Interpretation of the Herfindahl Index*. *Southern Economic Journal*, 48(1) pp. 50-57.
- Lambert, Peter J. 1993. *The Distribution and Redistribution of Income*, Ed. Manchester University Press.
- Márquez Diez-Canedo, Javier 1987. *Fundamentos de Teoría de Optimización*, Editorial Limusa S.A. de C.V.
- Márquez Diez-Canedo, Javier 2002: *Suficiencia de Capital y Riesgo Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios*. Documento de Investigación 2002-4; Banco de México.
- Markowitz, H. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons.
- Mason, S. P. 1995. The allocation of Risk. In *The Global Financial System*. Boston: Harvard Business School Press.
- Merton, R. C. *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates.* *Journal of Finance* 29, pp. 449-470, 1974.
- Moody's Investors Service. 1991. *Rating Cash Flow Transactions Backed by Corporate Debt*. Moody's Special Report. Abril.
- Nash, Stephen G. y Ariela Sofer 1996. *Linear and Nonlinear Programming*, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Neckell, Pamela, W. Perraudin and S. Varotto: *Stability of Rating Transitions*. *Journal of Banking and Finance*, vol. 24, pp. 203-227, 2000.
- Shy, Oz. 1995. *Industrial Organization: Theory and Applications*. The MIT press.
- Sleuwaegen, Leo E., Raymond R. De Bondt, and Wim V. Dehandschuter. *The Herfindahl index and concentration ratios revisited*. *The Antitrust Bulletin*/Fall 1989.
- STUART, Alan, et. al. Kendall's Advanced Theory of Statistics. Arnold Publishers, New York. 1999.
- Theil, Henri 1967. *Information Theory*, Ed. North Holland Publishing Co.
- Tirole, Jean. 1995. *The Theory of Industrial Organization*. M. I. T. Press.
- Weinstock, David S. *Some little-known properties of the Herfindahl-Hirschman Index: Problems of Translation and Specification*. *The Antitrust Bulletin*/ Winter 1984.
- Wilson, Thomas C. *Portfolio Credit Risk (I)*. *Risk magazine*, 10(9) Septiembre 1997.
- Wilson, Thomas C. *Portfolio Credit Risk (II)*. *Risk magazine*, 10(10) Octubre 1997.