



BANCO
DE
MEXICO

EL IMPACTO DE LA CORRELACIÓN ENTRE IMPAGOS EN LA CONCENTRACIÓN DE RIESGO EN PORTAFOLIOS DE PRÉSTAMOS BANCARIOS:

**Construcción de un índice de concentración de
riesgo y adecuación del modelo CyRCE para
medir el riesgo de crédito.**

Junio-2002



EL IMPACTO DE LA CORRELACIÓN ENTRE IMPAGOS EN LA CONCENTRACIÓN DE RIESGO EN PORTAFOLIOS DE PRÉSTAMOS BANCARIOS:

Construcción de un índice de concentración de riesgo y adecuación del modelo CyRCE para medir el riesgo de crédito.

Javier Márquez Diez-Canedo¹
Gerencia de Análisis de Riesgos y Proyectos Especiales
Banco de México
Junio del 2002

Resumen.

En la primera versión del modelo CyRCE se mencionó que la correlación de incumplimiento entre deudores aumenta la concentración de riesgo. En este documento se analiza la forma en que la correlación afecta la concentración, replanteando el modelo general de CyRCE, de manera que la medida de la varianza de pérdidas es el cociente de Rayleigh. El análisis se basa en el concepto de una correlación equivalente y se aprecia que la varianza resultante es una combinación convexa entre la máxima concentración posible y la del portafolio de créditos, medida con el índice de Herfindahl y Hirschman, donde el ponderador es dicha correlación equivalente. Esto conduce de manera natural a la construcción de un *Índice de concentración de riesgo* en la cartera de créditos, y cualquier segmento de esta que se quiera analizar.

Además de permitir el análisis del impacto de la correlación, este nuevo modelo es más simple y fácil de implantar que el anterior y conduce a límites individuales más precisos, según se puede apreciar a través del ejemplo que se manejó en la primera versión.

¹ El autor desea agradecer la colaboración de Maribell Rojas Garduño, Rosa Emilia Ojeda y Alberto Romero.

EL IMPACTO DE LA CORRELACIÓN ENTRE IMPAGOS EN LA CONCENTRACIÓN DE RIESGO EN PORTAFOLIOS DE PRÉSTAMOS BANCARIOS:

Construcción de un índice de concentración de riesgo y
adecuación del modelo CyRCE para medir el riesgo de crédito.

Javier Márquez Diez-Canedo
Gerencia de Análisis de Riesgos y Proyectos Especiales
Banco de México
Junio del 2002

I. INTRODUCCIÓN:

Aunque matemáticamente el modelo CyRCE original es correcto, su implantación en la práctica es complicada, ya que el cambio de variable utilizado exige la factorización de la matriz de varianza-covarianza de incumplimientos “**M**” mediante su *raíz cuadrada* “**S**”; es decir: $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$. El problema estriba en que esta representación de **S** no es única, y que requiere un esfuerzo numérico que no es despreciable. Además, aunque se hace evidente que el redimensionamiento del vector original de créditos que resulta del cambio de variable $\mathbf{G} = \mathbf{S} \mathbf{F}$ implica que la concentración por número de créditos no necesariamente es lo mismo que la concentración de riesgo, es difícil medir y visualizar la forma como la correlación afecta la concentración por números y se genera la concentración de riesgo dentro de la cartera.

En este estudio, se vuelve a derivar el modelo CyRCE utilizando el cociente de Rayleigh, llegando a relaciones más simples y fáciles de manejar en la práctica. Bajo la misma estructura analítica del desarrollo original, se derivan expresiones para VaR, suficiencia de capital, y límites individuales. Asimismo, el modelo se extiende para permitir el análisis de la cartera segmentada, obteniendo límites individuales diferenciados y requisitos de capital por segmento además de expresiones que indican la contribución de cada segmento al riesgo total de la cartera.

La parsimonia del modelo, proporciona un medio conveniente para analizar el impacto de la correlación entre incumplimientos al riesgo de crédito en general y a la concentración en lo particular. El análisis permite construir un *Índice de concentración de riesgo* que es muy útil para el análisis de riesgo de un portafolio de créditos, o cualquiera de sus segmentos. Los resultados se ilustran aplicando el nuevo modelo a los datos del mismo ejemplo numérico de la versión original.

II. UN MODELO GENERAL DE RIESGO CRÉDITO.

Considérese una cartera crediticia donde todos los créditos tienen diferentes probabilidades de impago, y que además están correlacionados entre sí. Supóngase que

la distribución de probabilidad de impago se puede caracterizar mediante la media y la varianza. Se conocen el vector de “probabilidades esperadas de impago p ” y la correspondiente matriz de “varianza-covarianza M ”. La relación de monto en riesgo queda:

$$VAR_a = p^T F + z_a \sqrt{F^T M F} \leq K \quad \dots(1.1)$$

Al multiplicar y dividir $F^T M F$ por $F^T F$, y dividir todo por el valor de la cartera $V = \mathbf{1}^T F$, se obtiene la relación de suficiencia de capital según:

$$y \geq \bar{p} + z_a \sqrt{\frac{F^T M F}{F^T F}} H(F) = \bar{p} + z_a s \sqrt{H(F)} \quad \dots(1.2)$$

Donde

$$s^2 = \frac{F^T M F}{F^T F} = R(F, M) = \text{Cociente de Rayleigh} \quad \dots(1.3)$$

es una medida de la *desviación estándar* de las pérdidas y

$$\bar{p} = \frac{p^T F}{V} \quad \dots(1.4)$$

es la *probabilidad de incumplimiento promedio ponderada por el tamaño relativo de los créditos*. De aquí se obtiene la cota sobre la concentración y el límite individual sobre los créditos aplicando el teorema 5.1 de la versión original², según:

$$H(F) = q \leq \left(\frac{y - \bar{p}}{z_a s} \right)^2 \quad \dots(1.5)$$

De hecho, las desigualdades de (1.2) y (1.5) tienen exactamente la misma forma que se obtuvo en la versión original, excepto que ahora, la varianza de las pérdidas está medida por el “Cociente de Rayleigh”. Nótese que el cociente de Rayleigh es una relación entre la norma del vector de créditos redimensionado a través de la matriz de varianza-covarianza y la norma del vector original de créditos. Es fácil verificar que lo anterior se reduce al caso simple unidimensional cuando las probabilidades de incumplimiento son iguales e independientes³ para todos los deudores.

Como se indicó en la versión original, el redimensionamiento del vector de créditos a través de la matriz de varianza-covarianza implica que **la concentración en números no es lo único que debe tomarse en cuenta**. Es decir, un grupo de muchos créditos pequeños pero de varianzas de incumplimiento grandes y altamente correlacionados

² Véase J. Márquez. Suficiencia de Capital y Riesgo Crédito. BANXICO Docto. De Investigación N0. 2002-4

³ Simplemente hágase $p = p\mathbf{1}$ y $M = p(\mathbf{1}-p)I$.

entre sí puede representar más riesgo, que un pequeño grupo de créditos grandes, cuya varianza y probabilidades de impago sean pequeñas y que además no estén muy correlacionadas, ni entre sí, ni con otros créditos. La varianza total de las pérdidas $s \sqrt{H(\mathbf{F})}$, se descompone en el efecto de la varianza de las probabilidades de incumplimiento, medida por el cociente de Rayleigh y el efecto de la concentración medida por $H(\mathbf{F})$.

III. La correlación equivalente, su impacto en la concentración de riesgo y un Índice de Concentración de Riesgo.

Para investigar la manera en que se aumenta el riesgo de crédito al aumentar la correlación, considérese el caso particular en el que las probabilidades de incumplimiento son las mismas para todos los créditos al igual que sus coeficientes de correlación; es decir: Cuando la matriz de varianza - covarianza se puede escribir según:

$$M = \begin{pmatrix} s^2 & rs^2 & \dots & rs^2 \\ rs^2 & s^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & rs^2 \\ rs^2 & \dots & rs^2 & s^2 \end{pmatrix} = s^2 \begin{pmatrix} 1 & r & \dots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \dots & r & 1 \end{pmatrix} \dots\dots(3.1)$$

Para el caso en que la distribución asociada al incumplimiento de los créditos individuales es Bernoulli(p), se tiene que:

$$M = p \cdot (1-p) \begin{pmatrix} 1 & r & \dots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \dots & r & 1 \end{pmatrix} \dots\dots(3.2)$$

Aplicando (1.1) a este caso simple, la expresión para VaR es:

$$VaR = V \left\{ p + z_a \sqrt{p \cdot (1-p)} \sqrt{r + (1-r)H(F)} \right\} \dots\dots(3.3)$$

En la relación anterior, la varianza de pérdidas se descompone en dos elementos. El primero es el que se refiere a la varianza Bernoulli $p(1-p)$, mientras que el efecto de concentración está representado por:

$$H' = r + (1-r)H(F) \dots (3.4)$$

Nótese que esta expresión representa una combinación convexa entre $H(.) = 1$ de un portafolio totalmente concentrado, y el índice de concentración de la cartera original de

créditos $H(F)$. Así, se puede decir que la cartera se comporta como una en donde hay independencia entre deudores pero con una concentración H' , que aumenta de acuerdo con el coeficiente de correlación " r ". Por esta razón, H' podría considerarse como un *índice de concentración corregido por correlación*. Evidentemente, si hay independencia de incumplimiento entre deudores y la correlación es nula ($r = 0$); $H' = H(F)$. En el caso contrario, si los incumplimientos entre deudores están perfecta y positivamente correlacionados ($r = 1$); entonces: $H' = 1$. Por esta razón podemos pensar que H' es de hecho, un *índice de concentración de riesgo*.

Basado en lo anterior, para cualquier nivel de riesgo de una cartera de créditos - medido por el VaR de acuerdo con (1.1) - se pueden encontrar una probabilidad de incumplimiento " p " y un coeficiente de correlación " r ", tales que

$$p(1-p) \cdot H' = p \cdot (1-p) \cdot [r + (1-r)H(F)] = R(M, F) \cdot H(F) \dots\dots(3.5)$$

Despejando el coeficiente de correlación se obtiene:

$$r = \frac{\left(\frac{R(M, F)}{p \cdot (1-p)} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{H(F)} - 1 \right)} = \frac{[R(M, F) - p \cdot (1-p)]H(F)}{p \cdot (1-p)[1 - H(F)]} \dots\dots(3.6)$$

La expresión anterior nos dice que el *coeficiente de correlación equivalente* para todos los créditos del portafolio, es una razón entre diferencias de varianzas. En el numerador, es la diferencia entre la varianza de pérdidas de la cartera de créditos, y la varianza de pérdidas de la cartera de créditos "F", si todos los créditos tuvieran la misma probabilidad de incumplimiento " p " y fuesen independientes. En el denominador, es la diferencia entre la varianza de pérdidas de una cartera totalmente concentrada, con la varianza de pérdidas de la cartera de créditos "F", si todos los créditos tuvieran la misma probabilidad de incumplimiento " p " y fuesen independientes. Para propósitos prácticos, si se toma por probabilidad de incumplimiento la promedio ponderada de la cartera (1.4), se puede encontrar el coeficiente de correlación implícito mediante (3.6) y así estimar el índice de concentración de riesgo según (3.4).

EJEMPLO 3.1

Para ilustrar los resultados anteriores, considérese el grupo de créditos del ejemplo anterior; Cuadro 6.1.

Cuadro 6.1

N° de Créditos	CALIFICACIÓN							TOTAL
	A	B	C	D	E	F	G	
1	\$4,728	\$5,528	\$3,138	\$5,320	\$1,800	\$1,933	\$358	\$22,805
2	\$7,728	\$5,848	\$3,204	\$5,765	\$5,042	\$2,317	\$1,090	\$30,994
3			\$4,831	\$20,239	\$15,411	\$2,411	\$2,652	\$45,544
4			\$4,912			\$2,598	\$4,929	\$12,439
5			\$5,435				\$6,467	\$11,902
6							\$6,480	\$6,480
TOTAL	\$12,456	\$11,376	\$21,520	\$31,324	\$22,253	\$9,259	\$21,976	\$130,164

Cuadro 7.1.

Calificación		A	B	C	D	E	F	G
Probabilidad	Media (p)	1.65	3.00	5.00	7.50	10.00	15.00	30.00
de Impago (%)	Desv. Est. [p(1-p)]	12.74	17.06	21.79	26.34	30.00	35.71	45.83

Por su tamaño, la matriz de covarianzas \mathbf{M} , se segmentó en tres bloques⁴.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_{1,2} & \mathbf{C}_{1,3} \\ \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_{2,3} \\ \mathbf{C}_{3,1} & \mathbf{C}_{3,2} & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix}$$

Suponiendo normalidad, el valor en riesgo o monto en riesgo del portafolio con un nivel de confianza de 5%, es:

$$\text{VaR}_{.05} = \pi^T \mathbf{F} + z_{.05} \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} = 14,179 + 1.96(21,176) = \$55,684$$

Calculando ahora:

$$\bar{p} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{F}}{V} = \frac{14,179}{130,164} = 0.1089 \quad \text{y} \quad \mathbf{s} = \sqrt{\frac{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}} = \sqrt{0.4006} = 0.6329$$

Recordando que $H(F) = 0.0661$, la condición de suficiencia de capital queda:

$$\psi > \bar{p} + z_{\alpha} \sigma \sqrt{H(F)} = 0.4278$$

Supóngase $K = \$60,000$, de manera que $\psi = \frac{60,000}{130,164} = 0.4610$. Entonces, al calcular el límite individual como proporción del valor del portafolio, de la ecuación (1.5), se obtiene:

⁴ Dichos bloques se presentan en las tablas B.2 a B.7 en el apéndice B.

$$\theta \leq \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_{\alpha} \sigma} \right)^2 = \left(\frac{0.4610 - 0.1089}{1.96(0.6329)} \right)^2 = 0.0805$$

Esto es:

$$f_i \leq 0.0805 \times \$130,164 = \$10,482$$

Sólo existen dos créditos que exceden este límite (Cuadro 7.2). Nótese que la cota es exactamente la misma que se obtuvo con la otra versión del modelo.

Ahora, vamos a ver el impacto de la correlación en la concentración a través de la correlación equivalente (3.6):

$$\rho = \frac{[0.4006 - 0.0971] \times 0.0661}{0.0971 \times [1 - 0.0661]} = 0.2212$$

Con esto, el índice de concentración de riesgo es:

$$H' = 0.2212 + (1 - 0.2212) \times 0.0661 = 0.2727$$

Debe notarse que de entrada, el portafolio de este ejemplo es muy malo, dado que una gran proporción de los créditos tienen probabilidades de impago altas. Si además de esto se le agrega el efecto de la correlación sobre la concentración, vemos que la pérdida no esperada es de $\sigma \sqrt{H(F)} = 0.1627$, comparada con $\sqrt{p(1-p)H(F)} = 0.0801$ de los créditos que suponen independencia en los impagos; es decir: La correlación duplica la desviación estándar de la distribución de pérdidas de los créditos no correlacionados. Como se aprecia en el análisis, el efecto de correlación hace que la concentración de riesgo $H' = 27.27\%$, sea cuatro veces más que la concentración por números $H(F) = 6.61\%$, de tal manera que el requerimiento de capitalización de 43% del portafolio con créditos correlacionados, es substancialmente mayor al 27% requerido bajo el supuesto de independencia. §

Cuadro 7.2

	Calificación	Probabilidad de Incumplimiento	F	Proporción
1	A	0.0165	4,728	3.6%
2	C	0.05	3,204	2.5%
3	C	0.05	4,912	3.8%
4	D	0.075	5,320	4.1%
5	D	0.075	20,239	15.5%
6	F	0.15	1,933	1.5%
7	F	0.15	2,598	2.0%
8	G	0.3	1,090	0.8%
9	B	0.03	5,528	4.2%
10	C	0.05	3,138	2.4%
11	C	0.05	4,831	3.7%
12	E	0.1	5,042	3.9%
13	E	0.1	15,411	11.8%
14	F	0.15	2,411	1.9%
15	G	0.3	358	0.3%
16	G	0.3	6,467	5.0%
17	A	0.0165	7,728	5.9%
18	B	0.03	5,848	4.5%
19	C	0.05	5,435	4.2%
20	D	0.075	5,765	4.4%
21	E	0.1	1,800	1.4%
22	F	0.15	2,317	1.8%
23	G	0.3	2,652	2.0%
24	G	0.3	4,929	3.8%
25	G	0.3	6,480	5.0%
			130,164	

EJEMPLO 3.2

Se mencionó anteriormente que la concentración en números no es lo único que debe tomarse en cuenta. Para ilustrar esta aseveración, considérese un portafolio de un solo crédito cuya calificación es A:

Cuadro 7.3

N° de Créditos	CALIFICACIÓN	PROBABILIDAD DE IMPAGO (%)	DESVIACIÓN ESTÁNDAR (%)
	A		
1	\$130,164	1.65	12.74

Dado que es un portafolio de un solo crédito el índice de HH es igual a uno. Suponiendo normalidad y escogiendo un nivel de confianza de 5%, $z_a = 1.96$ se obtiene:

$$VaR_{.05} = V\left(\bar{p} + z_\alpha \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}\right) = 130,164(0.0165+0.2497) = \$34,647$$

Supóngase que el capital económico es \$60,000, entonces la razón de capitalización es:

$$\psi = 0.4610 \geq \frac{34,647}{130,164} = 0.2662$$

Ahora considérese el portafolio de créditos del ejemplo 3.1., el VaR de este portafolio es:

$$\begin{aligned} VaR_{.05} &= V\left\{\bar{p} + z_\alpha \sqrt{\bar{p} \cdot (1-\bar{p})} \sqrt{\rho + (1-\rho)H(F)}\right\} \\ &= 130,164[0.1089+1.96(0.3116)(0.5222)] = \$55,684 \end{aligned}$$

donde $\rho = 0.2212$ y $H' = 0.2727$

Supóngase el mismo capital económico, entonces la razón de capitalización es:

$$\psi = 0.4610 \geq \frac{55,684}{130,164} = 0.4278$$

Si la correlación fuera nula, $\rho = 0$, entonces $H' = H(F)$. Tómese el caso en el que $H(F)=1$, es decir, el caso en el que se tuviera un solo crédito. El VaR de este portafolio sería:

$$VaR_{.05} = V\left\{\bar{p} + z_\alpha \sqrt{\bar{p} \cdot (1-\bar{p})}\right\} = 130,164(0.7196) = \$93,662$$

Es decir, el VaR bajo este esquema es casi tres veces mayor al VaR calculado para el portafolio descrito en el Cuadro 7.3 en donde sólo se tiene un crédito. La diferencia estriba en la probabilidad de default, ya que mientras que en un portafolio se tiene un solo crédito con probabilidad de 0.0165, en el otro portafolio se tiene una probabilidad ponderada de 0.1089 que es casi 7 veces la probabilidad del crédito con calificación "A".

Por otro lado si la correlación fuera unitaria, $\rho = 1$, entonces $H' = 1$, sin importar el índice de concentración en números y otra vez se llega a que todo el peso lo tiene la probabilidad de default del portafolio.

7.3 EL TRATAMIENTO DE DIFERENTES DIMENSIONES DE CONCENTRACIÓN

Generalmente, los bancos clasifican sus portafolios de créditos en "segmentos" de acuerdo a algún criterio práctico de clasificación, como región geográfica, industria, o productos. Otro criterio es el de separar créditos al consumo por nivel de ingreso de los deudores, o créditos corporativos o empresariales a negocios de diferentes tamaños, y la

clasificación responde de alguna manera a la forma en que los bancos hacen sus negocios. Para el propósito de riesgo crédito en general y de concentración en particular, se desearía adoptar un criterio diferente. Como se mencionó con anterioridad, uno de los problemas más difíciles es determinar *ex-ante*, *dimensiones potencialmente peligrosas de concentración*, y eso puede no tener nada que ver con la estructura organizacional del banco. Afortunadamente, el modelo desarrollado permite una segmentación totalmente arbitraria del portafolio, de manera que puede analizarse desde varios ángulos, y permite determinar los segmentos donde la concentración es potencialmente riesgosa. Esto permite la distinción de límites para cada segmento, y la evaluación de las implicaciones en términos de la suficiencia de capital. En lo que sigue, se emplearán las palabras *clase*, *segmento* y *dimensión de concentración* como sinónimos.

7.3.1. EL ANÁLISIS DE SEGMENTOS INDIVIDUALES.

Supóngase que se hace una partición arbitraria de F en h clases, $F^T = (F_1, \dots, F_h)$, donde F_i es un vector que contiene los saldos de los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento. Ahora se particionan el vector de probabilidades esperadas de incumplimiento y la matriz de varianza-covarianza, de esta manera:

- a) $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_i)$; Partición del vector de probabilidades de impago, donde " \mathbf{p}_i " es el vector de probabilidades de impago del segmento i ; $i = 1, 2, 3, \dots, h$

- b) La matriz de varianza-covarianza se particiona como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & C_{12} & \cdots & C_{1h} \\ C_{21} & M_2 & \cdots & C_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{h1} & C_{h2} & \cdots & M_h \end{bmatrix}$$

Cada submatriz M_i corresponde a la matriz de varianza-covarianza *idiosincrática* del grupo " i " y tiene dimensión $(N_i \times N_i)$; donde N_i es el número de créditos en el segmento. Todas estas matrices son positivas definidas al igual que \mathbf{M} y las matrices " C_{ij} " contienen las covarianzas de las probabilidades de impago entre los créditos del grupo " i " y las del grupo " j ".

A partir de aquí, sea $V_i = \sum_{j \in F_i} f_j$, el valor de la cartera asociada a la clase " i ", y $\sum_{i=1}^h V_i = V$.

Ahora, sea $K_i = g_i K$, donde " g_i " es la proporción del capital asignado al segmento " i "; $g_i \in [0, 1] \forall i$; $\sum_{i=1}^h g_i = 1$. Procediendo de manera usual, la desigualdad el valor en riesgo para cada clase es:

$$\text{VaR}_\alpha^i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{F}_i + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i} \leq K_i = \gamma_i K \quad \dots (7.9)$$

En lo anterior, es importante notar que la matriz “ \mathbf{S}_i ” tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_{li} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{i1} & \dots & M_i & \dots & C_{iN} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{Ni} & \dots & 0 \end{bmatrix} \dots (7.10)$$

Cada matriz “ \mathbf{S}_i ” solamente toma en cuenta las correlaciones entre las probabilidades de impago de los créditos del grupo “ i ” con los de los demás grupos, pero elimina las correlaciones entre los demás grupos que no inciden directamente sobre el grupo en cuestión. Otra forma de escribir la desigualdad del Valor en Riesgo es la siguiente:

$$\text{VaR}_\alpha^i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{F}_i + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{F}_i + 2 \sum_{\{j/j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j} \leq K_i \quad \dots (7.11)$$

Dividiendo ambos lados por el valor de la cartera V_i , después de un poco de álgebra se llega a:

$$H(\mathbf{F}_i) \leq \left(\frac{\mathbf{y}_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \mathbf{s}_i} \right)^2 - \frac{2}{\mathbf{s}_i^2 (\mathbf{1}^T \mathbf{F}_i)^2} \sum_{\{j/j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \quad \dots (7.12)$$

donde $\sigma_i = \sqrt{\frac{\mathbf{F}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{F}_i}{\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i}} = \sqrt{R_i(\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i)}$.

Resulta interesante notar que la cota de la concentración ahora incluye una corrección que tiene que ver con la correlación de impago con los créditos de otros segmentos (el segundo término en el lado derecho de la desigualdad). Esto concuerda con la intuición, dado que una correlación alta de impago con los créditos de otros segmentos, indica que se puede tolerar menos concentración en el grupo “ i ”.

Con un argumento análogo al de la sección 7.2, se obtienen entonces límites individuales q_i para los créditos de cada segmento:

$$\theta_i \leq \left(\frac{\Psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{\sigma_i^2 (\mathbf{1}^T \mathbf{F}_i)^2} \sum_{\{j/j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \quad \dots (7.13)$$

Al igual que con la expresión (7.6), el cociente de Rayleigh conduce a:

$$\theta_i \leq \frac{1}{\lambda_{\max}} \left\{ \left(\frac{\Psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha} \right)^2 - \frac{2}{V_i^2} \sum_{\{j/j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \right\} \quad \dots (7.14)$$

Nótese que la diferencia con la relación (7.5), es que en (7.13) se hace un ajuste por la correlación que hay entre las probabilidades de impago de los créditos del segmento "i" con las de los créditos de los demás segmentos, representado por el término,

$$\frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{\{j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j \quad \text{ó} \quad \frac{2}{V_i^2} \sum_{\{j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j$$

Evidentemente, cuando este término es positivo, como suele ser el caso, el efecto es el de reducir las cotas sobre los segmentos individuales. En resumen, se evidencia como se obtienen límites individuales diferenciados por segmento, que dependen de tres factores; a saber:

1. La razón de suficiencia de capital idiosincrásica del segmento:

$$\left(\frac{\Psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \sigma_i} \right)^2$$

2. La corrección por correlación con otros segmentos:

$$\frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{\{j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j \quad \text{ó} \quad \frac{2}{V_i^2} \sum_{\{j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j$$

3. El cociente de Rayleigh, explícito en 1 y 2, o en su caso el valor característico mayor de M.

7.3.2. SUFICIENCIA DE CAPITAL PARA UNA CARTERA SEGMENTADA.

Al integrar el análisis de los segmentos individuales a todo el portafolio, es importante tomar en cuenta dos cosas. Primero, que los pesos relativos de cada segmento en el portafolio no alteren los resultados obtenidos para el portafolio no segmentado. Segundo, que se mantenga una propiedad de aditividad, que permita sumar los requerimientos de capital de los segmentos individuales, para obtener el requerimiento para el portafolio en su conjunto. Esto puede lograrse de la siguiente manera:

Sea

$$\phi = \frac{\sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}}{\sum_{i=1}^h \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}}} \dots\dots\dots (7.15)$$

y defínase:

$$v_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{F}_i + z_\alpha \phi \sqrt{\mathbf{F}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{F}_i} \leq K_i = \gamma_i K \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, h \quad \dots\dots (7.16)$$

Donde $\mathbf{g} \geq 0$ y $\sum_i \mathbf{g}_i = 1$. Es fácil verificar que $\sum_i \mathbf{n}_i = VaR_a = \mathbf{p}^T \mathbf{F} + z_a \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}$.

Ahora, dividiendo (7.16) por V_i , un análisis similar al de la sección anterior conduce a:

$$\Psi_i \geq \frac{V_i}{V_i} = \bar{p}_i + z_\alpha \phi \sqrt{R_i(\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i)H(\mathbf{F}_i) + \frac{2}{(\mathbf{1}^T \mathbf{F}_i)^2} \sum_{\{j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j} \dots (7.17)$$

Resolviendo para $H(\mathbf{F}_i)$ se obtiene,

$$H(\mathbf{F}_i) \leq \left(\frac{\Psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{\{j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \dots (7.18)$$

y por el Teorema 6.1,

$$\theta_i \leq \left(\frac{\Psi_i - \bar{p}_i}{z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{\{j \neq i\}} \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_{ij} \mathbf{F}_j \dots (7.19)$$

En lo anterior, (7.17) establece la suficiencia de capital para los segmentos individuales, (7.18) establece un límite de concentración para el segmento, y (7.19) provee la relación para los límites individuales. Usando el cociente de Rayleigh y los resultados del Teorema 6.1, pueden obtenerse las expresiones para todo lo anterior pero en términos de los valores característicos.

Nótese que (7.17) y las expresiones siguientes se obtienen de “ V_i/V_i ”, de manera que el peso de los segmentos en el portafolio no se toma en cuenta. Por lo tanto, una simple suma de términos puede ser engañosa en cuanto a suficiencia de capital para el portafolio segmentado. Por lo tanto, sea, $\mathbf{g}_i = \frac{V_i}{V}$. Entonces, por construcción, si (7.17) se satisface

para todos los segmentos, $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^h \mathbf{g}_i \mathbf{y}_i$ asegura suficiencia de capital para el portafolio.

Una vez más, el análisis nos lleva a unas relaciones simples de las cuales se puede establecer suficiencia de capital. Las expresiones obtenidas pueden usarse como instrumentos normativos para determinar límites individuales, cambios en la composición del portafolio y/o los ajustes al capital requeridos para mantener suficiencia si cambia el comportamiento de impago de los créditos en alguno o todos los segmentos.

EJEMPLO 7.2.

Para ilustrar estos resultados, se usará el portafolio mostrado en el Cuadro 6.1 de los ejemplos anteriores. Este portafolio se segmentó en tres grupos. El vector de créditos, las probabilidades de impago y la matriz de varianza-covarianza se particionó de acuerdo a:

$$\mathbf{F}^T = (\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_3), \quad \boldsymbol{\pi}^T = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{C}_{1,2} & \mathbf{C}_{1,3} \\ \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{C}_{2,3} \\ \mathbf{C}_{3,1} & \mathbf{C}_{3,2} & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} \quad \text{donde:}$$

- M_1 , es la matriz de varianza-covarianza idiosincrática del primer grupo, que en este ejemplo consiste en ocho créditos: A1, C2, C4, D1, D3, F1, F4 y G2.⁵
- M_2 , es la matriz de varianza-covarianza idiosincrática del segundo grupo. En este ejemplo está formado por los ocho créditos siguientes: B1, C1, C3, E2, E3, F3, G1 y G5.
- M_3 , es la matriz de varianza-covarianza idiosincrática del tercer grupo, que en este ejemplo se conforma de los nueve créditos restantes: A2, B2, C5, D2, E1, F2, G3, G4 y G6.
- $C_{12}^T = C_{21}$, es la matriz de covarianzas entre los créditos de los grupos uno y dos. Análogamente, $C_{13}^T = C_{31}$ es la matriz de covarianzas entre los créditos del primer y segundo grupos y $C_{23}^T = C_{32}$ es la matriz de covarianzas entre los créditos del segundo y tercer grupos.

Nótese que para cada segmento, la forma de la matriz S_i es:

$$S_1 = \begin{bmatrix} M_1 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & 0 \\ C_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ C_{21} & M_2 & C_{23} \\ 0 & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & M_3 \end{bmatrix}.$$

Para aplicar los resultados, el primer paso es calcular el valor de cada segmento, su correspondiente índice de Herfindahl Hirschman, y su correspondiente asignación de capital. Estos números se resumen en el siguiente Cuadro:

Cuadro 7.3.

Segmento i	V_i	$H(F_i)$	g_i	K_i
1	\$ 44,024	0.2613	0.3382	\$ 20,293
2	\$ 43,186	0.2008	0.3318	\$ 19,907
3	\$ 42,954	0.1293	0.33	\$ 19,800

De (7.15), el parámetro ϕ que permite la suma de los VaR ajustados es:

$$\phi = \frac{\sqrt{F^T M F}}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{F^T S_i F}} = 0.4622$$

Al calcular n_i con (7.16), usando un nivel de confianza de 5% y suponiendo normalidad se obtienen las siguientes relaciones para suficiencia de capital:

⁵ A1 es el primer crédito calificado con A, C2 es el segundo crédito calificado con C y así sucesivamente.

$$n_1 = \$16,255 < K_1 = \$20,293 ,$$

$$n_2 = \$19,368 < K_2 = \$19,907 ,$$

$$n_3 = \$20,060 > K_3 = \$19,800 .$$

Nótese que el capital asignado al último segmento no cubre su riesgo, de hecho es el segmento más riesgoso de los tres. Esto significa que este último grupo tampoco satisface las demás condiciones.

En el siguiente cuadro se resume la distribución de los créditos por segmento:

Cuadro 7.4

Calificación	F1	Calificación	F2	Calificación	F3
A1	\$ 4,728	B1	\$ 5,528	A2	\$ 7,728
C2	\$ 3,204	C1	\$ 3,138	B2	\$ 5,848
C4	\$ 4,912	C3	\$ 4,831	C5	\$ 5,435
D1	\$ 5,320	E2	\$ 5,042	D2	\$ 5,765
D3	\$ 20,239	E3	\$ 15,411	E1	\$ 1,800
F1	\$ 1,933	F3	\$ 2,411	F2	\$ 2,317
F4	\$ 2,598	G1	\$ 358	G3	\$ 2,652
G2	\$ 1,090	G5	\$ 6,467	G4	\$ 4,929
Total=	\$ 44,024	Total=	\$ 43,186	Total=	\$ 42,954

Es interesante notar que como $\gamma_i = \frac{V_i}{V}$, necesariamente se tiene

$$\psi_i = \frac{K_i}{V_i} = \frac{\gamma_i \times K}{V_i} = \frac{K}{V} = \frac{60,000}{130,164} = 0.4610 \text{ para todos los segmentos. El siguiente cuadro}$$

muestra las probabilidades esperadas de impago, el coeficiente de Rayleigh y la corrección que se hace por correlación:

Cuadro 7.5

Segmento i	p_i	$R_i(F_i, M_i)$	Corrección por correlación
1	0.0774	0.0998	0.7790
2	0.1162	0.1741	0.5720
3	0.1339	0.3340	0.2753

Con estos valores, pueden verificarse las relaciones (7.18) y (7.19) para todos los segmentos del portafolio. Como era de esperarse, el tercer grupo incumple:

$$H(F_3) = 0.1293 > \left(\frac{\Psi_i - \bar{P}_i}{z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{\{j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j = 0.1148$$

Ahora, de (7.19) se obtienen los límites individuales que implican suficiencia de capital:

$$\theta_1 \leq 1.7969 - 0.7790 = 1.0179 ; f_1 \leq 1.0179 \times \$44,024 = \$44,812$$

$$\theta_2 \leq 0.8319 - 0.5720 = 0.2598 ; f_2 \leq 0.2598 \times \$43,186 = \$11,222$$

$$\theta_3 \leq 0.3901 - 0.2753 = 0.1148 ; f_3 \leq 0.1148 \times \$42,954 = \$4,930$$

Evidentemente, dado que la cota para los créditos del primer grupo es $q_1 = 1.018 > 1$ todos los créditos del grupo están dentro del límite. En el segundo grupo, el crédito de \$15,411 excede el límite. Finalmente, como era de esperarse el tercer grupo es el más problemático ya que sólo los cuatro créditos más pequeños respetan el límite.

Es interesante analizar los efectos de la correlación en este ejemplo. Lo anterior establece que el primer grupo puede tener créditos de cualquier tamaño, pero por otro lado, el segmento más riesgoso debe incluir sólo créditos muy pequeños, lo cual aunque es lógico, claramente no se cumple.

Ahora, con respecto a suficiencia de capital, se examina (7.17) y al comparar ψ con

$\sum \gamma_i \frac{V_i}{V_i}$, se obtiene:

$$\psi = 0.4610 \geq \sum_{i=1}^3 \frac{v_i}{V_i} = \frac{\text{VaR}}{V} = \frac{55,684}{130,164} = 0.4278 ,$$

Nótese que el resultado es el mismo que el del ejemplo 7.1, con lo cual se verifica que el portafolio cuenta con suficiencia de capital, a pesar de que el tercer segmento en lo individual, viola todos los requisitos. Es interesante notar el poder analítico de la herramienta aquí desarrollada, dado que si se restringe el ejercicio al uso del modelo general como en el ejemplo 7.1, sin analizar los segmentos individuales, el tercer segmento que es claramente un grupo riesgoso de créditos, hubiera pasado desapercibido. Finalmente, es además evidente, que los resultados dependen del criterio de segmentación usado, dado que se pueden clasificar los créditos de manera que todos los segmentos cumplan con las relaciones que sean relevantes, en cuyo caso los grupos riesgosos no se detectarían. Sin embargo, el ejemplo indica claramente como obtener una idea de la concentración ex ante, en el peor de los casos por prueba y error. Un poco más de investigación seguramente conducirá a una búsqueda más sistemática. §

7.4 LA INCLUSIÓN DE TASAS DE RECUPERACIÓN.

Es sencillo ampliar todas las relaciones obtenidas hasta ahora, para tomar en cuenta de forma explícita las tasas de recuperación de los créditos. Hacerlo, conduce a límites menos estrictos en términos de la concentración tolerable en los distintos segmentos. Básicamente, existen dos maneras de incluir tasas de recuperación en el análisis. La primera es definir \mathbf{F} directamente como el vector de “pérdidas dado incumplimiento” (PDI) en lugar del saldo pendiente, donde se supone que nada se recupera si los deudores no pagan. Esto estaría más de acuerdo con la práctica actual⁶. Entonces, si se tiene una estimación del vector PDI, puede usarse directamente en las relaciones antes obtenidas sin cambio alguno, pero deben interpretarse correctamente.

Explícitamente, el incluir tasas de recuperación implica hacer una transformación inicial del vector original de créditos. Sea “ D ” la matriz diagonal, cuyos elementos distintos de cero son las tasas de pérdida dado incumplimiento. El vector de pérdidas dado incumplimiento para el portafolio es entonces: $\mathbf{P} = D\mathbf{F}$ y sea $\mathbf{V}' = \mathbf{1}'\mathbf{P}$. Para incluir correlación, se calcula la transformación $\mathbf{G} = \mathbf{S}\mathbf{P}$. Así, el vector original se transforma de hecho dos veces i.e. $\mathbf{G} = \mathbf{SDF}$. Con un poco de álgebra se llega a las relaciones de suficiencia de capital, concentración y límites individuales, los cuales muestran como los cambios en la matriz de pérdida dado incumplimiento “ D ”, afectan los parámetros.

Aunque la transformación sugerida conduce a un modelo completamente general, es difícil visualizar el impacto de cambiar las tasas de recuperación en el riesgo crédito, la concentración y la suficiencia de capital. Además, debe tomarse en cuenta que las tasas de recuperación son por sí mismas variables aleatorias, de manera que esta matriz puede cambiar de acuerdo a las condiciones económicas y de mercado. Por ello, se desearía poder explorar fácilmente la sensibilidad de las relaciones de suficiencia de capital, concentración y límites individuales a cambios en las tasas de recuperación. Entonces, considérese la alternativa de suponer por ejemplo⁷, que el portafolio está segmentado de manera que las tasas de recuperación sean las mismas para todos los créditos del grupo. Bajo la estructura de la sección anterior, sea “ r_i ” la tasa de recuperación de los créditos que caigan en impago en el segmento “ i ”, de manera que la pérdida dado incumplimiento es simplemente $\mathbf{P}_i = (1 - r_i)\mathbf{F}_i$. Procediendo de la manera usual:

$$\sum_i (1-r_i)\lambda_i^2 H(\mathbf{G}_i) + \frac{1}{(\mathbf{1}'\mathbf{G})^2} \sum_i (1-r_i) \sum_{\{j|j \neq i\}} (1-r_j) F_i^T C_{ij} F_j \leq \left(\frac{\psi - \frac{1}{V} \sum_i (1-r_i) \pi_i^T F_i}{z_\alpha \sigma} \right)^2 \dots 7.4.1$$

Esta expresión muestra claramente que cualquier cambio en las tasas de recuperación tiene un impacto doble. Por un lado, un aumento (disminución) en la tasa de recuperación de cualquier segmento en particular, reduce (incrementa) la importancia de la contribución de la concentración de estos segmentos (parte izquierda de la desigualdad). Adicionalmente, su contribución a la pérdida esperada también disminuye (aumenta) el numerador del lado derecho, incrementando (disminuyendo) la cota establecida para la concentración. Además, no es difícil probar que el denominador del lado derecho de la

⁶ Véase el documento de “Credit Risk Modeling” del Comité de Basilea de Supervisión Bancaria. Abril 1999.

⁷ Esto es lo que hace CreditRisk⁺.

desigualdad, se comporta de la manera esperada; disminuyendo al aumentar la tasa de recuperación y viceversa.

Finalmente, es necesario señalar que no se requiere hacer la segmentación por pérdidas iguales dado incumplimiento. Aunque esto fue conveniente para evidenciar el impacto de las tasas de recuperación sobre concentración, límites y requisitos de capital, se puede adecuar el modelo haciendo la transformación del vector de saldos, y conservar la flexibilidad del modelo para segmentar la cartera de cualquier manera que se estime conveniente y realizar el análisis correspondiente para detectar segmentos riesgosos.

REFERENCIAS.

Adelman, M. A. 1969. *Comment on the "H" Concentration Measure as a Numbers-Equivalent*. *Review of Economics and Statistics*, Febrero, pp. 99-101.

Altman Edward I., y Anthony Saunders 1998. *Credit risk measurement: Development over the last 20 years*. *Journal of Banking & Finance* 21 (1998) 1721-1742.

Crouhy, Michel, Dan Galai y Robert Mark: A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance* 24 (2000) pp. 59-117.

Basle Committee on Banking Supervision, 1999. *Credit Risk Modeling: Current Practices and Applications*.

Bennet, P. 1984. *Applying Portfolio Theory to Global Bank Lending*. *Journal of Banking and Finance*.

Caouette, John B., Edward I. Altman y Paul Narayanan 1998. *Managing Credit Risk: The next great challenge*. Ed. John Wiley & Sons, Inc.

Coopers and Lybrand. 1993. *Growth and Diversification: Are the Benefits Always There?* In *Mortgage Banking*, editado por J. Lederman. Chicago: Probus Publishing Company.

Cowell, Frank A., *Measuring Inequality 2nd edition*. LSE Handbooks in Economics, Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf, 1995.

Credit Risk + : Credit Suisse Financial Products, New York, N.Y. 1996.

CreditMetrics™: Technical document, Abril 2, 1997.

De Groot, Morris H., *Probabilidad y Estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington Delaware. 1988.

Encaoua, David y Jacquemin, Alexis. 1980. *Degree of monopoly, indices of concentration and threat of entry*. *International Economic Review* 21.

Finger, Christopher C.: **Sticks and Stones**, The RiskMetrics Group. 1998

Gordy, Michael B. *A comparative Anatomy of Credit Risk Models*. *Journal of Banking and Finance*, vol 24, 2000, pp. 119-149.

Kealhofer, S. Portfolio Management of Default Risk. KMV Corporation, 1998.(Revised.)

Kealhofer, S. Modeling Default Risk. KMV Corporation, 1999 (Revised.)

Kelly Jr. W.A. 1981. *A Generalized Interpretation of the Herfindahl Index*. *Southern Economic Journal*, 48(1) pp. 50-57.

Lambert, Peter J. 1993. *The Distribution and Redistribution of Income*, Ed. Manchester University Press.

- Márquez Diez-Canedo, Javier 1987. *Fundamentos de Teoría de Optimización*, Editorial Limusa S.A. de C.V.
- Markowitz, H. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons.
- Mason, S. P. 1995. The allocation of Risk. In *The Global Financial System*. Boston: Harvard Business School Press.
- Merton, R. C. *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates.* Journal of Finance 29, pp. 449-470, 1974.
- Moody's Investors Service. 1991. *Rating Cash Flow Transactions Backed by Corporate Debt*. Moody's Special Report. Abril.
- Nash, Stephen G. y Ariela Sofer 1996. *Linear and Nonlinear Programming*, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Neckell, Pamela, W. Perraudin and S. Varotto: Stability of Rating Transitions. Journal of Banking and Finance, vol. 24, pp. 203-227, 2000.
- Shy, Oz. 1995. *Industrial Organization: Theory and Applications*. The MIT press.
- Sleuwaegen, Leo E., Raymond R. De Bondt, and Wim V. Dehandschuter. *The Herfindahl index and concentration ratios revisited*. The Antitrust Bulletin/Fall 1989.
- Theil, Henri 1967. *Information Theory*, Ed. North Holland Publishing Co.
- Tirole, Jean. 1995. *The Theory of Industrial Organization*. M. I. T. Press.
- Weinstock, David S. *Some little-known properties of the Herfindahl-Hirschman Index: Problems of Translation and Specification*. The Antitrust Bulletin/ Winter 1984.
- Wilson, Thomas C. *Portfolio Credit Risk (I)*. Risk magazine, 10(9) Septiembre 1997.
- Wilson, Thomas C. *Portfolio Credit Risk (II)*. Risk magazine, 10(10) Octubre 1997.